Johdatus funktionaalianalyysiin

Tommi Höynälänmaa

16. joulukuuta 2015

Sisältö

Kuvat

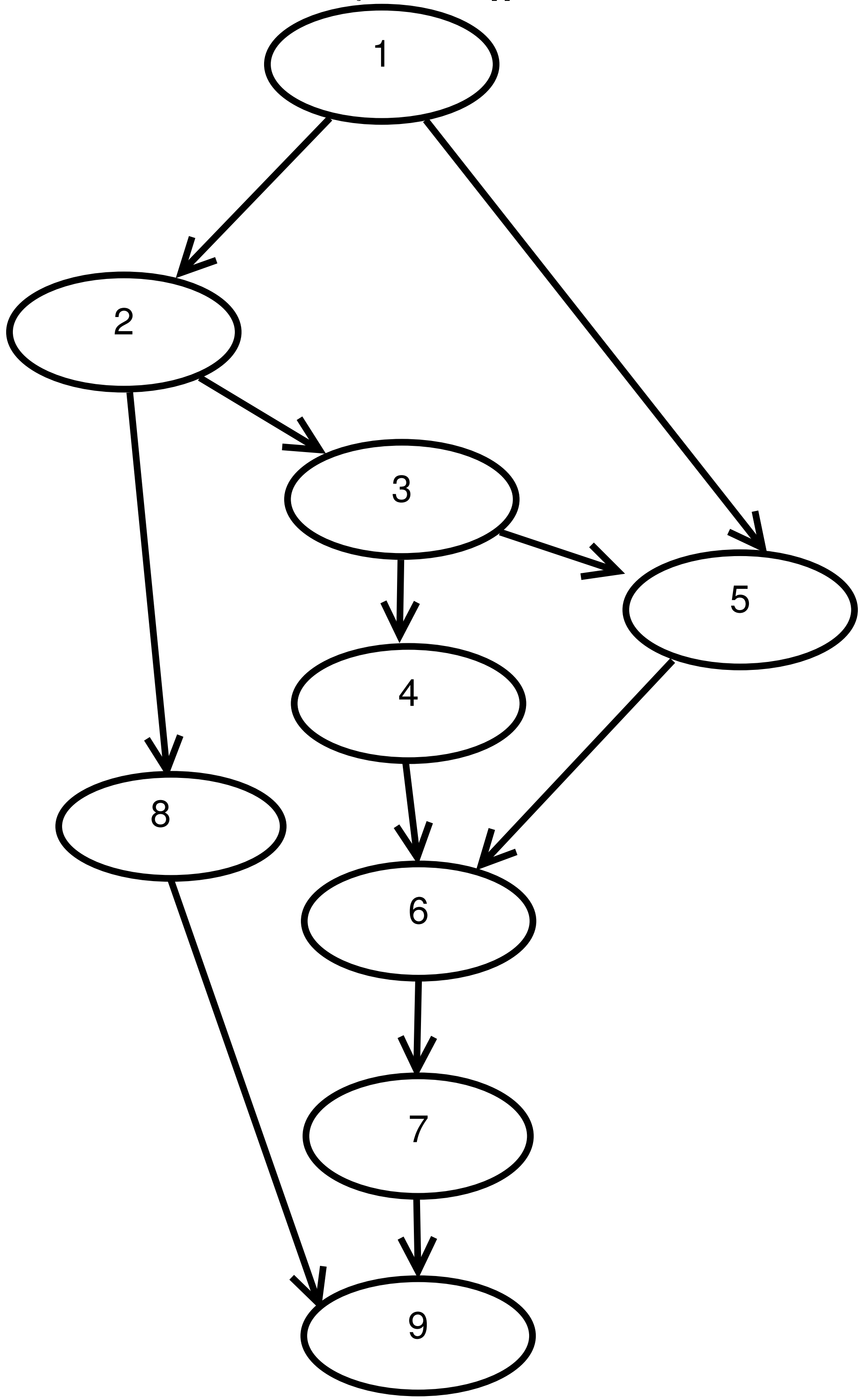
Esipuhe

Funktionaalianalyysi voidaan määritellä topologisia vektoriavaruuksia tutkivaksi matematiikan haaraksi. Tässä mielessä funktionaalianalyysi on topologian ja lineaarialgebran synteesi.

Luku 1 esittelee tarvittavia peruskäsitteitä, kuten joukko, relaatio ja funktio. Luku 2 käsittelee myöhemmin tarvittavia algebrallisia struktuureja: ryhmiä ja kuntia. Luvussa 3 konstruoidaan lukujoukot: luonnolliset luvut, kokonaisluvut, rationaaliluvut, reaaliluvut ja kompleksiluvut. Luku 4 esittelee vektoriavaruudet ja luku 5 jonot, verkot, filtterit, topologiset avaruudet ja topologisen avaruuden erikoistapauksen metrisen avaruuden. Luku 6 käsittelee topologisia vektoriavaruuksia, jotka ovat karkeasti vektoriavaruuksia, joissa on määritelty topologia. Tässä luvussa määritellään myös lokaalikonveksit avaruudet, sisätuloavaruudet ja normiavaruudet, jotka ovat topologisten vektoriavaruuksien erikoistapauksia. Luvussa 7 määritellään distribuutiot ja temperoidut distribuutiot. Luku 8 käsittelee mittateoriaa ja siinä määritellään Lebesguen integraali. Luvussa 9 määritellään usein tarvittavia funktioavaruuksia.

Yleisesti kukin luku nojaa kaikkiin sitä edeltäviin lukuihin. Poikkeuksena mittateoriaa käsittelevä luku 8 ei tarvitse vektoriavaruuksien, topologisten avaruuksien eikä topologisten vektoriavaruuksien teoriaa. Kuvassa 1 on esitetty kaavio lukujen välisistä riippuvuuksista: $A \to B$ tarkoittaa, että luku B riippuu luvusta A.

Kuva 1: Lukujen väliset riippuvuudet.



Luku 1

Johdanto

1.1 Matematiikan perusteista

Matemaattinen teoria koostuu joukosta aksioomia eli perusoletuksia, joista kaikki teorian lauseet johdetaan. Tosin Gödelin lauseen mukaan jokaisessa teoriassa, joka sisältää luonnolliset luvut, on olemassa tosia lauseita, joita ei voida johtaa teorian aksioomista. Luvut, joukot ja muut matemaattiset käsitteet ovat ongelmallisia materialistisen todellisuuskäsityksen kannalta, koska ne eivät ole ainetta. Ilmeisesti todellisten olioiden joukon (ei matemaattisessa mielessä) on oltava laajempi kuin aineellisten olioiden joukko.

Algoritmi on lista toimintaohjeista jonkin ongelman ratkaisemiseksi. On olemassa myös algoritmeja, jotka eivät pääty äärellisessä ajassa, ja ongelmia, joihin ei ole algoritmia ollenkaan. **Turingin kone** on kuvitteellinen laita joka koostuu lukupäästä ja sen läpi kulkevasta nauhasta. Kone lukee vuorollaan merkin nauhasta ja päättää sen perusteella, miten se siirtää nauhaa seuraavaksi. Algoritmisesti ratkeavien ongelmien luokka on sama, kuin ne ongelmat, jotka Turingin kone pystyy ratkaisemaan. Tämä luokka on myös sama kuin ne ongelmat, jotka tietokone pystyy ratkaisemaan. Jos algoritmin nopeus on syötteen määrän polynomiaalinen funktio, niin algoritmi kuuluu luokkaan P. Muussa tapauksessa algoritmi kuuluu luokkaan NP. On avoin kysymys, ovatko P ja NP samat.

1.2 Joukot

Matematiikan peruskäsite on **joukko**. Joukko on olio, jolle jokaisesta toisesta oliosta voidaan sanoa, kuuluuko se joukkoon vai ei. Joukkoon kuuluvia olioita sanotaan sen **alkioiksi**. Aikoinaan Bertrand Russell keksi määritellä joukon, joka sisältää kaikki ne joukot, jotka eivät ole itsensä alkioita, siis $P := \{x \mid x \notin x\}$. Merkintä $A := B$ tarkoittaa, että muuttujan A arvoksi määritellään B. Nyt voidaan kysyä, onko P itsensä alkio. Jos se on, se ei ole, ja jos se ei ole, se on. Tämä on **Russellin paradoksi**. Paradoksin johdosta Frege katsoi koko luomansa matematiikan aksiomaattisen järjestelmän romahtavan, mutta näin synkkä ei tilanne ollut. Paradoksi voitiin kiertää rajoittamalla sitä, mitä joukon jäsenenä voi olla. Olio, joka ei voi olla minkään joukon alkio, on nimeltään **luokka**. Yleisesti käytetty joukko-opin Zermelo-Fraenkelin aksioomajärjestelmä ei sisällä luokkia, mutta von Neumann-Bernays-Gödelin aksioomajärjestelmä sisältää ne.

Joukko voidaan määritellä esim. luettelemalla sen alkiot: $A := \{1, 3, 5, 6\}$ tai antamalla jokin predikaatti (ehto), joka kertoo, kuuluuko kukin olio joukkoon vai ei: $B := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$. Joukko B sisältää kaikki reaaliluvut, jotka ovat suurempia kuin 5. **Tyhjää joukkoa** merkitään $\emptyset$. Jos A ja B ovat joukkoja, niin sanomme, että A on joukon B **osajoukko**, jos jokainen joukon A alkio kuuluu joukkoon B. Tätä merkitään $A \subset B$. Jos $A \subset B$ mutta $A \neq B$, niin sanomme, että A on joukon B **aito osajoukko**. Joukon A **potenssijoukko** 2^A on joukon A kaikkien osajoukkojen joukko. Esim. jos $A := \{1, 2, 3\}$, niin

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Kun alkio x kuuluu joukkoon A, niin merkitään $x \in A$. Jos x ei kuulu joukkoon A, niin merkitään $x \notin A$. Joukkojen A ja B **unioni** $A \cup B$ koostuu molempien joukkojen kaikista alkioista. On huomattava, ettei mikään alkio voi esiintyä unionissa tai muussakaan joukossa kahta kertaa. Esim. jos $A := \{1, 2, 3\}$ ja $B := \{3, 5\}$, niin $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$. Joukkojen A ja B **leikkaus** $A \cap B$ koostuu alkioista, jotka kuuluvat sekä joukkoon A että joukkoon B. Edellisen esimerkin joukoilla $A \cap B = \{3\}$. Joukkojen A ja B **erotus** määritellään

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$

ja sitä sanotaan myös joukon B **komplementiksi** joukossa A.

Joukkojen A ja B **karteesinen tulo** määritellään

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Esim. jos $A := \{1, 2, 3\}$ ja $B := \{4, 5\}$, niin

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}.$$

Huomaa, että parit (x,y) ovat järjestettyjä: esim. $(1, 2) \neq (2, 1)$. Kun A on joukko ja n on positiivinen kokonaisluku, niin määritellään karteesinen tulo

$$A^n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in A\}.$$

Myös vektorit $(a_1, \ldots, a_n)$ ovat järjestettyjä. Kun A on joukko, niin määritellään

$$\#A := \text{joukon } A \text{ alkioiden lukumäärä.}$$

$\#A$ voi olla ääretön.

Määritelmä 1.2.1. Olkoon I (mahdollisesti ääretön) epätyhjä joukko. Olkoot A_i, $i \in I$, joukkoja. Sanomme, että joukot A_i ovat erillisiä, jos $A_i \cap A_j = \emptyset$ kaikilla $i, j \in I$, $i \neq j$.

Taulukko 1.1: Loogisten JA- ja TAI-operaatioiden totuustaulu

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Taulukko 1.2: Loogisen EI-operaation totuustaulu

P	$\neg P$
0	1
1	0

Valinta-aksiooma on aksiooma, jonka mukaan minkä tahansa joukon A potenssijoukosta 2^A voidaan muodostaa uusi joukko poimimalla kustakin joukon 2^A alkiosta yksi alkio ja muodostamalla niistä joukko. Edellisen esimerkin joukossa tällainen joukko on esim. $\{1, 2\}$. Äärettömien joukkojen tapauksessa tilanne ei ole näin selvä, eikä valinta-aksiooma kuulukaan kaikkiin joukko-opin aksioomajärjestelmiin. Valinta-aksioomasta seuraa **Banach-Tarskin paradoksi** [13]: Jos on annettu täytetty pallo kolmiulotteisessa avaruudessa, niin tämä pallo voidaan jakaa äärelliseen määrään erillisiä joukkoja, joista voidaan sitten muodostaa kaksi alkuperäisen pallon identtistä kopiota.

1.3 Logiikkaa

Logiikka operoi väitteillä, jotka ovat joko tosia tai epätosia. Yleensä 1 tarkoittaa totta väitettä ja 0 epätotta. Loogiset operaatiot ovat:

- $\neg P$: ei P
- $P \wedge Q$: P ja Q
- $P \vee Q$: P tai Q

JA- ja TAI-operaatioiden totuustaulu on taulukossa 1.3. Huomaa, että $P \vee Q$ on tosi myös silloin, kun sekä P että Q ovat tosia. EI-operaation totuustaulu on taulukossa 1.3.

Jokin väite P voi sisältää muuttujia, esim. "$x > 3$". Tällöin väitettä voidaan merkitä $P(x)$.

Merkintä $\forall x : P(x)$ tarkoittaa, että väite $P(x)$ on tosi kaikille olioille x. Merkintä $\exists x : P(x)$ tarkoittaa, että on olemassa ainakin yksi olio x, jolle $P(x)$ on tosi. Merkintä $\exists! x : P(x)$ tarkoittaa, että on olemassa tasan yksi olio x, jolle $P(x)$ on tosi. Symbolia $\forall$ sanotaan **universaalikvanttoriksi** ja symbolia $\exists$ **eksistenssikvanttoriksi**.

Jos A on joukko, niin $\forall x \in A : P(x)$ tarkoittaa, että väite $P(x)$ on tosi kaikille $x \in A$ ja $\exists x \in A : P(x)$, että on olemassa ainakin yksi $x \in A$, jolle $P(x)$ on tosi. Jos $A = \emptyset$, niin $\forall x \in A : P(x)$ on tosi ja $\exists x \in A : P(x)$ on epätosi riippumatta väitteestä $P(x)$. Merkintä $\exists! x \in A : P(x)$ tarkoittaa, että on olemassa tasan yksi olio $x \in A$, jolle $P(x)$ on tosi.

Jos P ja Q ovat väitteitä, niin $P \iff Q$ tarkoittaa, että P ja Q ovat yhtäpitäviä eli ekvivalentteja. Tämä tarkoittaa, että P on tosi, jos ja vain jos Q on tosi. Merkintä $P \implies Q$ tarkoittaa, että väitteestä P seuraa väite Q. Symboli " $\iff$ " on nimeltään **ekvivalenssi** ja ja symboli " $\implies$ " **implikaatio**.

1.4 Relaatiot ja funktiot

Epätyhjien joukkojen A ja B karteesisen tulon $A \times B$ osajoukkoa R kutsutaan joukkojen A ja B väliseksi **relaatioksi**. Alkiot $x \in A$ ja $y \in B$ toteuttavat relaation R, jos ja vain jos $(x, y) \in R$. Jos x ja y toteuttavat relaation R, niin merkitään xRy. Jos $A = B$ niin kutsumme relaatiota R relaatioksi joukossa A.

Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja ja f niiden välinen relaatio. Jos kullekin $x \in A$ on olemassa tasan yksi $y \in B$, jolle xRy, niin sanotaan, että f on **funktio** ja merkitään $f(x) = y$. Tällöin funktiota voidaan merkitä $f : A \to B$. Jos $f : A \to B$ on funktio, niin sitä voidaan merkitä

$$x \in A \mapsto f(x),$$

esim. $x \in \mathbb{R} \mapsto 5x$. Joukkoa A sanotaan funktion f **määrittelyjoukoksi** ja joukkoa B funktion f **maalijoukoksi**. Kun $C \subset A$, niin määritellään

$$f[C] := \{f(x) \mid x \in C\}.$$

Joukkoa $f[A]$ sanotaan funktion f **kuvajoukoksi**. Sanomme, että funktio f on **injektio**, jos se kuvaa eri alkiot aina eri alkioille eli $x, y \in A \quad \text{ja} \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$. Funktio $f : A \to B$ on **surjektio**, jos jokaiselle $b \in B$ on olemassa $a \in A$ siten, että $f(a) = b$. Surjektiota voidaan merkitä $f : A \twoheadrightarrow B$. Jos f on sekä injektio että surjektio, niin sanomme että f on **bijektio**. Havainnollisesti bijektio tarkoittaa, että joukkojen A ja B alkiot kuvautuvat toisilleen yksi yhteen. Jos $f : A \to B$ on surjektio, niin sanomme, että f on funktio joukolta A *joukolle* B. Jos $f : A \to B$ ei välttämättä ole surjektio, niin sanomme, että f on funktio joukolta A *joukkoon* B. Jos A ja B ovat epätyhjiä joukkoja, niin määritellään

$$A^B := \{\text{kaikki funktiot joukolta } B \text{ joukkoon} A\}.$$

Kun X on epätyhjä joukko, niin määritellään **identtinen funktio** $\mathrm{id}_X : X \twoheadrightarrow X$ asettamalla

$$\mathrm{id}_X(x) := x$$

kaikille $x \in X$. Jos I ja A ovat epätyhjiä joukkoja ja f funktio joukolta I joukkoon A, niin voimme merkitä tätä funktiota $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, missä $x_\alpha = f(\alpha)$, jolloin sanomme sitä **perheeksi**.

Määritelmä 1.4.1. Olkoot A ja B joukkoja ja $f : A \to B$ funktio. Olkoon $C \subset B$. Joukon C **alkukuva** määritellään $f^{-1}[C] := \{x \in A \mid f(x) \in C\}$.

Määritelmä 1.4.2. Olkoot A ja B joukkoja ja $f : A \to B$ funktio. Jos jokaiselle $y \in B$ on olemassa tasan yksi $x \in A$ jolle $f(x) = y$, niin määritellään funktion f **käänteisfunktio** $f^{-1} : B \to A$ asettamalla $x := f^{-1}(y)$.

Huomautus 1.4.3. Alkukuva $f^{-1}[C]$ on aina määritelty, vaikka käänteisfunktio f^{-1} ei olisikaan.

Määritelmä 1.4.4. Olkoon A joukko ja $\leq$ relaatio joukossa A Sanomme, että $\leq$ on **osittainen järjestys**, jos seuraavat aksioomat ovat voimassa:

(OJ1) antisymmetrisyys: $x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$

(OJ2) transitiivisuus: $x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$

(OJ3) refleksiivisyys: $x \leq x$

kaikille $x, y, z \in A$. Jos joukossa A on määritelty osittainen järjestys, niin sanomme, että joukko A on **osittain järjestetty**.

Määritelmä 1.4.5. Olkoon A joukko ja $\leq$ relaatio joukossa A Sanomme, että $\leq$ on **totaalinen järjestys**, jos seuraavat aksioomat ovat voimassa:

(J1) antisymmetrisyys: $x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$

(J2) transitiivisuus: $x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$

(J3) totaalisuus: $x \leq y \vee y \leq x$

kaikille $x, y, z \in A$. Jos joukossa A on määritelty totaalinen järjestys, niin sanomme, että joukko A on **totaalisesti järjestetty**. Jos lisäksi jokaisella joukon A epätyhjällä osajoukolla on pienin (relaation $\leq$ suhteen) alkio, niin sanomme, että A on **hyvin järjestetty**.

Määritelmä 1.4.6. Olkoon A totaalisesti järjestetty joukko ja $B \subset A$. Olkoon $r \in A$. Jos $x \leq r$ kaikilla $x \in B$, niin sanomme, että r on joukon B **yläraja**. Jos joukolla B on yläraja, niin sanomme, että B on **ylhäältä rajoitettu**. Jos $r \leq x$ kaikilla $x \in B$, niin sanomme, että r on joukon B **alaraja**. Jos joukolla B on alaraja, niin sanomme, että B on **alhaalta rajoitettu**.

Määritelmä 1.4.7. Olkoon A totaalisesti järjestetty joukko ja $B \subset A$. Jos B on ylhäältä rajoitettu, määritellään $\sup B$ joukon B pienimmäksi ylärajaksi, eli jokaiselle joukon B ylärajalle $r \in A$ on $\sup B \leq r$. Jos B ei ole ylhäältä rajoitettu, määritellään $\sup B := \infty$. Jos B on alhaalta rajoitettu, määritellään $\inf B$ joukon B suurimmaksi alarajaksi, eli jokaiselle joukon B alarajalle $q \in$

A on $q \leq \inf B$. Jos B ei ole alhaalta rajoitettu, määritellään $\inf B := -\infty$. Määritellään lisäksi $\sup \emptyset := \infty$ ja $\inf \emptyset := -\infty$. Määritellään edelleen

$$\sup_{x \in A} f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in A\}$$

ja

$$\inf_{x \in A} f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in A\}.$$

Määritelmä 1.4.8. Olkoon A joukko ja $\sim$ joukkojen A ja A välinen relaatio. Sanomme, että $\sim$ on **ekvivalenssirelaatio**, jos seuraavat aksioomat ovat voimassa:

(E1) refleksiivisyys: $x \sim x$

(E2) symmetrisyys: $x \sim y \iff y \sim x$

(E3) transitiivisuus: $x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z$

kaikille $x, y, z \in A$.

Määritelmä 1.4.9. Olkoon A joukko, $\sim$ ekvivalenssirelaation joukossa A ja $x \in A$. Sanomme joukkoa $\{y \in A \mid x \sim y\}$ alkion x määräämäksi **ekvivalenssiluokaksi** ja merkitsemme sitä $E(\sim; x)$.

Määritelmä 1.4.10. Olkoon A joukko ja $\sim$ ekvivalenssirelaation joukossa A. Määritellään **jäännösluokka-avaruus**

$$A/\!\sim \, := \{E(\sim; x) \mid x \in A\}.$$

Lause 1.4.11. *Olkoon A joukko ja $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukossa A. Nyt*

(1)

$$\bigcup_{J \in A/\sim} J = A$$

(2) Joukon $A/\!\sim$ alkiot ovat erillisiä.

Todistus.

(1) Jokainen $x \in A$ kuuluu johonkin $L \in A/\!\sim$ ja ekvivalenssirelaation määritelmän nojalla $L' \subset A$ kaikille $L' \in A/\!\sim$, joten

$$\bigcup_{J \in A/\sim} J = A.$$

(2) Nyt $A/\!\sim \, = \{E(\sim; x) \mid x \in A\}$ ja $E(\sim; x) \neq \emptyset$ kaikille $x \in A$.

Oletetaan, että joukossa $A/\!\sim$ on tasan yksi alkio L_1. Nyt $E(\sim; x) = L_1$ kaikille $x \in A$, joten $L_1 = A$. Täten (2) on tosi.

Oletetaan seuraavassa, että joukossa $A/\sim$ on enemmän kuin yksi alkio. Olkoot $M, N \in A/\sim$ ja $M \neq N$. Nyt $M = E(\sim; x)$ ja $N = E(\sim; y)$ joillekin $x, y \in A$, $x \neq y$.

Oletetaan, että $M \cap N \neq \emptyset$ (vastaoletus). Olkoon $z \in M \cap N$. Jos $m \in M$, niin $z \sim m$. Koska $z \in N$, niin $m \in N$. Siis $M \subset N$. Jos $n \in N$, niin $z \sim n$. Koska $z \in M$, niin $n \in M$. Siis $N \subset M$. Täten $M = N$, mikä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa. Siis on oltava $M \cap N = \emptyset$.

□

Määritelmä 1.4.12. [19] Olkoon A epätyhjä joukko ja $\geq$ relaatio joukossa A. Sanomme, että $(A, \geq)$ on **suunnattu joukko**, jos

(1) $a \geq a$ kaikille $a \in A$.

(2) $a \geq b \wedge b \geq c \implies a \geq c$ kaikille $a, b, c \in A$.

(3) Jos $a, b \in A$, niin on olemassa $c \in A$ siten, että $c \geq a$ ja $c \geq b$.

Huomautus 1.4.13. Jos järjestysrelaatio on asiayhteydestä selvä, niin voimme puhua myös suunnatusta joukosta A. Sovellamme samanlaista käytäntöä myös muihin matemaattisiin struktuureihin, kuten vektoriavaruuksiin ja topologisiin avaruuksiin.

1.5 Kardinaali- ja ordinaaliluvut

Ks. [15, 25].

Määritelmä 1.5.1. Olkoot A ja B joukkoja. Sanomme, että joukot A ja B ovat **yhtä mahtavia**, jos on olemassa bijektio joukolta A joukolle B.

Määritelmä 1.5.2. Olkoon A epätyhjä joukko. Sanomme, että A on **ääretön**, jos on olemassa bijektio joukolta A jollekin sen aidolle osajoukolle. Muussa tapauksessa sanomme, että joukko on **äärellinen**. Sanomme myös tyhjää joukkoa äärelliseksi.

Äärelliset joukot ovat yhtä mahtavia, jos ja vain jos niissä on yhtä monta alkiota. Jos joukon A mahtavuus on sama kuin luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$, niin sanomme, että A on **numeroituva**. Sanomme, että A on **korkeintaan numeroituva**, jos A on äärellinen tai numeroituva. Jos A on ääretön mutta ei numeroituva, niin sanomme, että A on **ylinumeroituva**.

Kardinaaliluvut kuvaavat joukkojen mahtavuuksia. Äärellisen joukon kardinaliteetti on sama kuin sen alkioiden lukumäärä. Kaikkien äärettömien joukkojen kardinaliteetit eivät kuitenkaan ole samat. Näin on esim. luonnollisille luvuille ja reaaliluvuille. Luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ mahtavuutta merkitään $\aleph_0$ ja reaalilukujen joukon mahtavuus on $2^{\aleph_0}$, ks. luku 3.

Jos joukossa S on määritelty osittainen järjestys $<$ ja joukossa S' osittainen järjestys $<'$, niin sanomme, että joukot $(S,<)$ ja $(S',<')$ ovat **järjestysisomorfisia**, jos on olemassa bijektio $f : S \twoheadrightarrow S'$, joka säilyttää järjestyksen, eli $f(a) <' f(b)$, jos ja vain jos $a < b$.

Jokainen hyvin järjestetty joukko $(S,<)$ on järjestysisomorfinen joukon kanssa, joka koostuu kaikista ordinaaliluvuista vähemmän kuin eräs tietty ordinaaliluku. Sanomme tätä ordinaalilukua joukon $(S,<)$ järjestystyypiksi. Jokainen ordinaaliluku α on järjestystyyppi joukolle, joka koostuu kaikista ordinaaliluvuista vähemmän kuin α. Äärelliset ordinaaliluvut ovat samat kuin luonnolliset luvut. Pienin ääretön ordinaaliluku on ω, joka samaistetaan kardinaalilukuun $\aleph_0$. Kuitenkin transfiniittisessa tapauksessa ordinaaliluvut erottelevat joukkoja tarkemmin kuin kardinaaliluvut.

Ordinaaliluvut määriteltiin alunperin hyvin järjestettyjen joukkojen ekvivalenssiluokkina. Tästä määrittelystä täytyy kuitenkin luopua joukko-opin Zermelo-Fraenkel ja siihen liittyvissä aksioomajärjestelmissä, koska nämä ekvivalenssiluokat ovat liian laajoja ollakseen joukkoja. Sen sijaan, että määrittelisimme ordinaaliluvun hyvin järjestettyjen joukkojen ekvivalenssiluokkana, määrittelemme sen yhtenä tiettynä hyvin määriteltynä joukkona, joka edustaa tätä luokkaa. Siten ordinaaliluku on eräs hyvin määritelty joukko, ja jokainen hyvin järjestetty joukko on järjestysisomorfinen tasan yhden ordinaaliluvun kanssa.

John von Neumannin esittämä standardi määritelmä on: Jokainen ordinaaliluku on sitä pienempien ordinaalilukujen muodostama hyvin järjestetty joukko. Muodollisemmin tämä kuuluu: Joukko S on ordinaaliluku, jos ja vain jos S on aidosti hyvin järjestetty joukon jäsenyysrelaation suhteen ja jokainen joukon S alkio on myös joukon S osajoukko. Luonnolliset luvut ovat ordinaalilukuja tämän määritelmän mukaan. Esim. 2 on luvun $4 = \{0,1,2,3\}$ alkio ja $2 = \{0,1\}$ on joukon $\{0,1,2,3\}$ osajoukko.

Jokaisella nollasta poikkeavalla ordinaaliluvulla on pienin alkio 0. Ordinaaliluvulla joko on tai ei ole suurinta alkiota. Jos ordinaaliluvulla β on maksimi α, niin ordinaalilukua β kutsutaan seuraajaordinaaliksi (ordinaaliluvun α seuraajaksi) ja sitä merkitään $\alpha + 1$. Von Neumannin määritelmän mukaan ordinaaliluvun α seuraaja on $\alpha \cup \{\alpha\}$. Jos ordinaaliluku α ei ole minkään toisen ordinaaliluvun seuraaja, niin ordinaalilukua α kutsutaan **rajaordinaaliksi**.

Jos oletetaan, että valinta-aksiooma on voimassa, niin joukon X kardinaliteetti on pienin ordinaaliluku α siten, että on olemassa bijektio joukolta X joukolle α. Tätä määrittelyä kutsutaan von Neumannin kardinaalilukujen määrittelyksi.

Esimerkkejä:

1. Joukko $\{1,2,3\}$ on äärellinen.

2. Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on numeroituvuuden määritelmän nojalla numeroituva.

3. Kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ ja rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ ovat numeroituvia.

4. Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$, irrationaalilukujen joukko $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ ovat ylinumeroituvia.

Määritelmä 1.5.3. Olkoot A ja B joukkoja. Sanomme, että joukon A mahtavuus on **aidosti suurempi** kuin joukon B, jos on olemassa bijektio joukolta B jollekin joukon A aidolle osajoukolle. Sanomme, että joukon A mahtavuus on **aidosti pienempi** kuin joukon B mahtavuus, jos on olemassa bijektio joukolta A jollekin joukon B aidolle osajoukolle.

Kontinuumihypoteesi väittää, ettei ole olemassa joukkoa, jonka mahtavuus on aidosti suurempi kuin joukon $\mathbb{N}$ ja aidosti pienempi kuin joukon $2^{\mathbb{N}}$.

Tehtäviä:

1.1 Määritellään relaatio $\sim$ joukossa $\mathbb{R}$ asettamalla

$$x \sim y \iff x^2 = y^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.

(b) Konstruoi jäännösluokka-avaruus $\mathbb{R} /\sim$.

(c) Osoita, että $\sim$ ei ole funktio.

Luku 2

Ryhmät ja kunnat

2.1 Ryhmät

Määritelmä 2.1.1. Olkoon G epätyhjä joukko ja $\circ : G \times G \to G$ funktio. Sanomme, että $(G, \circ)$ on **ryhmä**, jos seuraavat aksioomat ovat voimassa:

(G1) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ kaikille $a, b, c \in G$.

(G2) On olemassa alkio $e \in G$ siten, että $e \circ a = a \circ e = a$ kaikille $a \in G$.

(G3) Jokaisella $a \in G$ on olemassa alkio $b \in G$ siten, että $a \circ b = b \circ a = e$. Määritellään $a^{-1} := b$.

Jos lisäksi on voimassa aksiooma

(G4) $a \circ b = b \circ a$ kaikille $a, b \in G$.

niin sanomme, että $(G, \circ)$ on **kommutatiivinen ryhmä** eli **Abelin ryhmä**.

Alkio $e \in G$ on nimeltään **neutraalialkio**. Alkiota a^{-1} kutsutaan alkion a **käänteisalkioksi**. Toinen tapa sanoa, että $(G, \circ)$ on ryhmä on, että G on ryhmä operaation $\circ$ suhteen. Alkioiden a ja b välistä ryhmäoperaatiota voidaan merkitä myös ab. Tämä on yleistä silloin, kun ryhmäoperaationa on kertolasku. Kommutatiivisen ryhmän ryhmäoperaatiota merkitään usein "+" ja käänteisalkiota $-a$.

Esimerkkejä:

1. $(\mathbb{R}, +)$ on ryhmä.

2. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ on ryhmä

3. Vastaavasti $\mathbb{C}$ on ryhmä yhteenlaskun suhteen, ja $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ on ryhmä kertolaskun suhteen.

4. Bijektiota $p : \{1, \ldots, n\} \twoheadrightarrow \{1, \ldots, n\}$ sanotaan asteen n **permutaatioksi**. Permutaatiot tarkoittavat äärellisen joukon uudelleenjärjestelyjä. Esim. jos luvut 1, 2 ja 3 kuvataan luvuille 2, 3 ja 1 niin vastaavaa permutaatio on
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
asteen n permutaatioiden neutraalialkio on
$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix}$$
Permutaatioiden tulo $a \circ b$ määritellään tavallisena kuvausten yhdistämisenä (ensin sovelletaan b ja sitten a). Esim.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
Edellä annetuilla määritelmillä kaikki $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, alkion permutaatiot muodostavat ryhmän, jota merkitsemme P_n.

5. Vesimolekyylin symmetriaryhmä on C_{2v} [1], ks. kuva 2.1. Ryhmän C_{2v} operaatiot ovat:

   (a) e: ei tehdä mitään

   (b) C_2: 180° asteen kierto pääakselin ympäri

   (c) σ_v: peilaus sen tason suhteen, jossa molekyyli on

   (d) σ_v': peilaus molekyylin läpi menevän tason suhteen

Määritelmä 2.1.2. Olkoon $(G, \circ)$ ryhmä. Jos $A \subset G$ ja A on myös itse ryhmä, niin sanomme, että A on ryhmän G **aliryhmä**.

Lause 2.1.3. *Olkoon $(G, \circ)$ ryhmä ja $A \subset G$, $A \neq \emptyset$. A on ryhmän G aliryhmä, jos ja vain jos $a \circ b \in A$ kaikilla $a, b \in A$ ja $a^{-1} \in A$ kaikilla $a \in A$.*

Todistus harjoitustehtävänä.

Esimerkkejä:

1. Kun A on ryhmä, niin $\{e\}$ ja koko ryhmä A ovat ryhmän A aliryhmiä.

2. Joukko
$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$
on permutaatioryhmän P_3 aliryhmä.

Määritelmä 2.1.4. Olkoon $(G, \circ)$ ryhmä, H ryhmän G aliryhmä ja $a \in G$. Määritellään aliryhmän H **vasen sivuluokka** asettamalla

$$a \circ H := \{a \circ x \mid x \in H\}$$

ja **oikea sivuluokka** asettamalla

$$H \circ a := \{x \circ a \mid x \in H\}.$$

Kommutatiivisessa ryhmässä vasemmat ja oikeat sivuluokat ovat samat.

Määritelmä 2.1.5. Olkoot $(G, \circ)$ ja $(H, \star)$ ryhmiä ja $f : G \to H$ funktio. Sanomme, että f on **homomorfismi** jos $f(x \circ y) = f(x) \star f(y)$ kaikille $x, y \in G$. Jos lisäksi f on bijektio, niin sanomme, että f on **isomorfismi**.

2.2 Kunnat

Määritelmä 2.2.1. [21] Olkoon K epätyhjä joukko ja $+ : K \times K \to K$, $\cdot : K \times K \to K$ funktioita. Sanomme, että $(K, +, \cdot)$ on **kunta**, jos seuraavat aksioomat ovat voimassa:

(K1) $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(K2) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(K3) $a + b = b + a$.

(K4) $a \cdot b = b \cdot a$.

(K5) On olemassa $0_K \in K$ siten, että $0_K + a = a$ kaikille $a \in K$.

(K6) On olemassa $1_K \in K$ siten, että $1_K \cdot a = a$ kaikille $a \in K$.

(K7) $0_K \neq 1_K$.

(K8) Jokaiselle $a \in K$ on olemassa $-a \in K$ siten, että $a + (-a) = 0_K$.

(K9) Kun $a \in K \setminus \{0_K\}$, niin on olemassa $a^{-1} \in K$ siten, että $a \cdot a^{-1} = 1_K$.

(K10) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Alkiota 1_K sanotaan kunnan K **ykkösalkioksi** ja alkiota 0_K kunnan K **nolla-alkioksi**.

Esimerkkejä:

1. Joukko $\{0, 1\} \subset \mathbb{N}$ on kunta. Tämä on pienin mahdollinen kunta.

2. Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$, reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ ja kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ ovat kuntia.

Määritelmä 2.2.2. Olkoon K kunta. Sanomme, että funktio $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_0$, missä $\mathbb{R}_0 := \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$, on **itseisarvo**, jos

(i) $|\lambda| = 0 \iff \lambda = 0$;

(ii) $|\lambda + \mu| \leq |\lambda| + |\mu|$.

Tehtäviä:

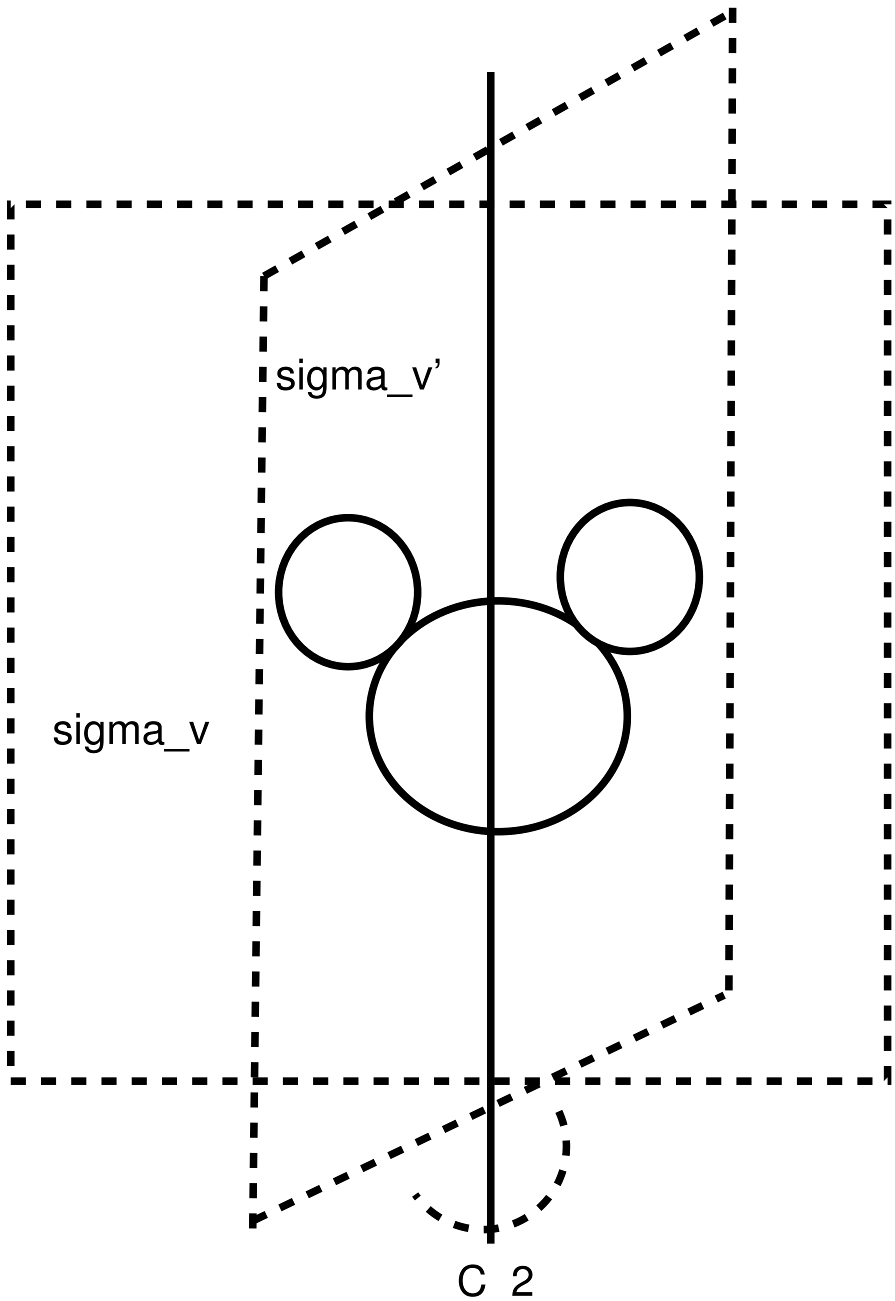
2.1 Osoita, että ryhmässä on ainoastaan yksi neutraalialkio.

2.2 Osoita, että kullakin ryhmän alkiolla on ainoastaan yksi käänteisalkio.

2.3 Kun $n \in \mathbb{Z}_+$, osoita että permutaatioryhmä P_n on ryhmä.

2.4 Todista lause 2.1.3.

Kuva 2.1: Symmetriaryhmän C_{2v} operaatiot vesimolekyylille.



Luku 3

Lukujoukot

3.1 Luonnolliset luvut $\mathbb{N}$

Määritellään $S(X) := X \cup \{X\}$, missä X on joukko.

Luonnolliset luvut määritellään seuraavasti [23]:

- $0 := \emptyset \in \mathbb{N}$
- Jos $k \in \mathbb{N}$, niin $S(k) \in \mathbb{N}$.

Saadaan seuraavanlainen jono:
$0 = \emptyset$
$1 = S(0) = S(\emptyset) = \{\emptyset\} = \{0\}$
$2 = S(1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$
$3 = S(2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$
$\vdots$

Operaatiota $S(k)$ kutsutaan luvun k **seuraajaksi**. Yhteenlasku määritellään rekursiivisesti:

- $a + 0 = a$;
- $a + S(b) = S(a + b)$,

missä $a, b \in \mathbb{N}$. Kertolasku määritellään rekursiivisesti:

- $a \cdot 0 = 0$;
- $a \cdot S(b) = (a \cdot b) + a$,

missä $a, b \in \mathbb{N}$. Kertolaskua $a \cdot b$ voidaan merkitä myös ab. Luonnollisten lukujen joukossa määritellään totaalinen järjestys asettamalla

$$a \leq b \iff \exists c \in \mathbb{N} : a + c = b.$$

Luonnolliset luvut noudattavat Peanon aksioomajärjestelmää.

3.2 Kokonaisluvut $\mathbb{Z}$

Määritellään ensin ekvivalenssirelaatio luonnollisten lukujen muodostamille (järjestetyille) pareille:

$$(a,b) \sim (c,d) \iff a+d = c+b$$

kaikille $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Kokonaislukujen joukko määritellään jäännösluokka-avaruutena

$$\mathbb{Z} := (\mathbb{N}\times\mathbb{N})\,/\sim .$$

Kun $a,b \in \mathbb{N}$, niin parin (a,b) määräämää ekvivalenssiluokkaa merkitään $\overline{(a,b)}$. Määritellään kokonaislukujen yhteenlasku

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} := \overline{(a+c, b+d)}$$

kaikille $a,b,c,d \in \mathbb{N}$, **vastaluku**

$$-\overline{(a,b)} := \overline{(b,a)}$$

kaikille $a,b \in \mathbb{Z}$, vähennyslasku

$$\overline{(a,b)} - \overline{(c,d)} := \overline{(a,b)} + (-\overline{(c,d)})$$

kaikille $a,b,c,d \in \mathbb{N}$ ja kertolasku

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} := \overline{(ac+bd, ad+bc)}$$

kaikille $a,b,c,d \in \mathbb{N}$. Kokonaislukujen joukossa määritellään totaalinen järjestys asettamalla

$$\overline{(a,b)} \le \overline{(c,d)} \iff \overline{(c+b, a+d)} = \overline{(n,0)} \text{ jollekin } n \in \mathbb{N}.$$

Luonnolliset luvut $a \in \mathbb{N}$ samaistetaan kokonaislukuihin $\overline{(a,0)}$.

Määritellään $\mathbb{Z}_+ := \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$.

3.3 Rationaaliluvut $\mathbb{Q}$

Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ joukossa $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+$ asettamalla

$$(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$$

kaikille $a,c \in \mathbb{Z}$, $b,d \in \mathbb{Z}_+$. Määritellään rationaalilukujen joukko

$$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+)\,/\sim .$$

Kun $a \in \mathbb{Z}$ ja $b \in \mathbb{Z}_+$, niin parin (a,b) määräämää ekvivalenssiluokkaa merkitään $\overline{(a,b)}$. Kunnan $\mathbb{Q}$ nolla-alkio on $0_{\mathbb{Q}} := \overline{(0,1)}$ ja ykkösalkio $1_{\mathbb{Q}} := \overline{(1,1)}$. Oletetaan seuraavassa, että $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \in \mathbb{Q}$. Määritellään rationaalilukujen yhteenlasku

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} := \overline{(ad+bc, bd)},$$

vastaluku

$$-\overline{(a,b)} := \overline{(-a,b)},$$

vähennyslasku

$$\overline{(a,b)} - \overline{(c,d)} = \overline{(a,b)} + (-\overline{(c,d)})$$

ja kertolasku

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} := \overline{(ac,bd)}$$

Kun $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$ ja $\overline{(a,b)} \neq 0_{\mathbb{Q}}$, niin määritellään rationaaliluvun $\overline{(a,b)}$ **käänteisluku**

$$\overline{(a,b)}^{-1} := \overline{(b,a)}$$

ja jakolasku

$$\overline{(c,d)}/\overline{(a,b)} := \overline{(c,d)} \cdot \overline{(a,b)}^{-1}.$$

Määritellään rationaalilukujen joukossa totaalinen järjestys asettamalla

$$\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)} \iff ad - bc \leq 0$$

Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on kunta. Kokonaisluvut $a \in \mathbb{Z}$ samaistetaan rationaalilukuihin $\overline{(a,1)}$. Määritellään $\mathbb{Q}_+ := \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$.

3.4 Reaaliluvut $\mathbb{R}$

Reaaliluvut voidaan konstruoida rationaaliluvuista joko Cauchyn jonoina tai Dedekindin leikkauksina. Seuraamme ensimmäistä tapaa. Jonot on esitelty luvussa 5.1.

Määritelmä 3.4.1. Olkoon $\mathbf{a} := (a_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$. Sanomme, että $\mathbf{a}$ on **rationaalinen Cauchyn jono**, jos

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n,m \in \mathbb{N} : n > N \land m > N \implies |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Määritellään

$$A := \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} := (a_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{Q} \text{ on rationaalinen Cauchyn jono}\}.$$

Määritellään relaatio $\sim$ joukossa A asettamalla

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \iff \lim_{k\to\infty} |\mathbf{a}[k] - \mathbf{b}[k]| = 0.$$

Määritellään reaalilukujen joukko

$$\mathbb{R} := A/\sim.$$

Kun $\mathbf{a} \in A$, niin alkion $\mathbf{a}$ määräämää ekvivalenssiluokkaa merkitään $\overline{\mathbf{a}}$.

Määritellään

$$0_{\mathbb{R}} := \overline{(0)_{k=0}^{\infty}}$$

ja

$$1_{\mathbb{R}} := \overline{(1)_{k=0}^{\infty}}.$$

Määritellään reaaliluvun vastaluku

$$-\overline{\mathbf{a}} := \overline{-\mathbf{a}}$$

missä $\overline{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}$ ja yhteen- ja vähennyslasku

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}} &:= \overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}} \\ \overline{\mathbf{a}} - \overline{\mathbf{b}} &:= \overline{\mathbf{a} - \mathbf{b}} \end{aligned}$$

missä $\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}$. Määritellään reaalilukujen kertolasku

$$\overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{b}} := (\mathbf{a}[k] \cdot \mathbf{b}[k])_{k=0}^{\infty}.$$

Määritellään nollasta poikkeavan reaaliluvun käänteisluku seuraavasti: Olkoon $\overline{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}, \overline{\mathbf{a}} \neq 0_{\mathbb{R}}$. Nyt $\lim_{k\to\infty} \mathbf{a}[k] \neq 0$, joten on olemassa luku $k_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $\mathbf{a}[k] \neq 0$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$. Asetetaan

$$(\overline{\mathbf{a}})^{-1} := \overline{\left(\frac{1}{\mathbf{a}[k_0 + k]} \right)_{k=0}^{\infty}}.$$

Määritellään reaalilukujen jakolasku

$$\overline{\mathbf{a}} / \overline{\mathbf{b}} := \overline{\mathbf{a}} \cdot \left(\overline{\mathbf{b}}\right)^{-1}$$

missä $\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}, \overline{\mathbf{b}} \neq 0_{\mathbb{R}}$. Määritellään totaalinen järjestys reaalilukujen joukossa asettamalla $\overline{\mathbf{a}} \leq \overline{\mathbf{b}}$ jos ja vain jos on olemassa $k_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $\mathbf{a}[k] \leq \mathbf{b}[k]$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$.

Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on kunta ja totaalisesti järjestetty joukko. Lisäksi reaalilukujen joukossa on voimassa **täydellisyysaksiooma**: Jokaisella ylhäältä rajoitetulla joukolla $J \subset \mathbb{R}$ on pienin yläraja. Täydellisyysaksioomaa on havainnollistettu kuvassa 3.4. Aksiooman todistus on seuraavassa [18]: Olkoon S jokin joukon $\mathbb{R}$ epätyhjä osajoukko. Jos kaikki joukon S alkiot ovat ei-negatiivisia, niin olkoon U jokin joukon S rationaalinen yläraja ja valitaan luku $L \in \mathbb{Q}$ siten, että $L < s$ jollekin $s \in S$. Määritellään jonot (u_n) ja (l_n) seuraavasti:

- Asetetaan $u_0 := U$ ja $l_0 := L$.
- Määritellään $m_n := (u_n + l_n)/2$.
- Jos m_n on joukon S yläraja, asetetaan $u_{n+1} := m_n$ ja $l_{n+1} := l_n$. Muuten asetetaan $l_{n+1} := m_n$ ja $u_{n+1} := u_n$.

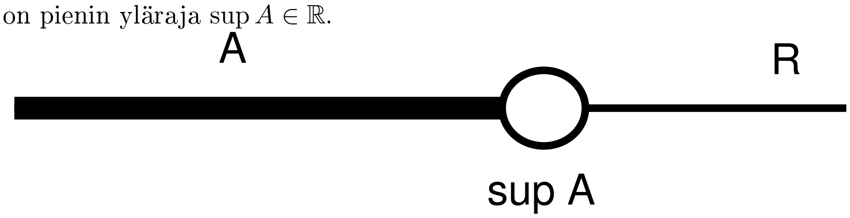
Näin määritellään kaksi rationaalista Cauchyn jonoa, joten saamme reaaliluvut $u := \overline{(u_n)}$ ja $l := \overline{(l_n)}$. Induktiolla voidaan osoittaa, että u_n on joukon S yläraja kaikille n ja l_n ei ole joukon S yläraja millekään n. Meillä on

$$\lim_{n\to\infty} (u_n - l_n) = 0,$$

joten $l = u$. Oletetaan, että $b < u = l$ olisi pienempi yläraja joukolle S kuin u. Koska (l_n) on kasvava, niin $b < l_k$ jollekin k. Mutta l_n ei ole joukon S yläraja ja siten ei myöskään b ole yläraja. Täten u on joukon S pienin yläraja.

Huomaa, että täydellisyysaksiooma ei ole voimassa rationaalilukujen joukossa: esim. joukolla $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$ ei ole pienintä ylärajaa rationaalilukujen joukossa.

Kuva 3.1: Täydellisyysaksiooma: jokaisella ylhäältä rajoitetulla joukolla $A \subset \mathbb{R}$ on pienin yläraja $\sup A \in \mathbb{R}$.



Määritellään $\mathbb{R}_+ := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ ja $\mathbb{R}_0 := \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$. Määritellään laajennettu reaalilukusuora $\mathbb{R}_* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Määritelmä 3.4.2. Kun $a, b \in \mathbb{R}_*$ ja $a \leq b$, niin määritellään reaalilukuvälit

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R}_* \mid a \leq x \leq b\} \\
[a,b[&:= \{x \in \mathbb{R}_* \mid a \leq x < b\} \\
]a,b] &:= \{x \in \mathbb{R}_* \mid a < x \leq b\} \\
]a,b[&:= \{x \in \mathbb{R}_* \mid a < x < b\}
\end{aligned}$$

Väliä $[a, b]$ kutsutaan **suljetuksi väliksi** ja väliä $]a, b[$ **avoimeksi väliksi**.

3.5 Kompleksiluvut $\mathbb{C}$

Reaalilukujen joukossa ei voi ratkaista yhtälöä

$$x^2 = -1.$$

Tästä nousee esiin tarve lukualueen laajentamiselle reaaliluvuista, ja näin syntyvät kompleksiluvut.

Määritellään kompleksiluvut reaalilukupareina:

$$\mathbb{C} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Kun $z := (x, y) \in \mathbb{C}$, niin lukua x sanotaan kompleksiluvun z **reaaliosaksi** ja lukua y kompleksiluvun z **imaginaariosaksi**. Määritellään $\operatorname{Re} z := x$ ja $\operatorname{Im} z := y$. Määritellään kompleksiluvuille

- yhteenlasku: $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$

- vastaluku: $-(a,b) := (-a,-b)$
- vähennyslasku: $(a,b)-(c,d) := (a-b, c-d)$
- kertolasku: $(a,b)\cdot(c,d) := (ac-bd, ad+bc)$

kaikille $(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}$. Kun $((a,b),(c,d)\in\mathbb{C}$ ja $(c,d)\neq(0,0)$, niin määritellään kompleksiluvun käänteisluku

$$(c,d)^{-1} := \frac{(c,-d)}{c^2+d^2}$$

ja kompleksilukujen jakolasku

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} := \frac{(ac+bd, bc-ad)}{c^2+d^2}.$$

Kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ on kunta, jonka ykkösalkio on $(1,0)$ ja nolla-alkio $(0,0)$. Kompleksilukujen joukko ei kuitenkaan ole totaalisesti järjestetty joukko.

Määritellään **imaginaariyksikkö** $\mathrm{i} := (0,1)$. Nyt jokainen kompleksiluku (a,b) voidaan kirjoittaa muodossa $a+\mathrm{i}b$, missä $a,b\in\mathbb{R}$. Kun $z := a+\mathrm{i}b\in\mathbb{C}$, niin määritellään kompleksiluvun z **liittoluku** eli **konjugaatti** $z^* := a-\mathrm{i}b$.

Tarkastellaan kompleksilukuja $(a,0)$ ja $(b,0)$, $a,b\in\mathbb{R}$. Nyt

$$\begin{aligned}
(a,0)+(b,0) &= (a+b,0)\\
-(a,0) &= (-a,0)\\
(a,0)\cdot(b,0) &= (ab,0)\\
(a,0)^{-1} &= \left(\frac{1}{a},0\right), \quad \text{kun } a\neq 0
\end{aligned}$$

Siis kompleksiluvut $(a,0)$, $a\in\mathbb{R}$, voidaan samaistaa reaalilukuihin a. Täten kompleksilukujen kunta on reaalilukujen kunnan kuntalaajennus. Voidaan osoittaa, että kompleksilukujen kunta on laajin kunta, joka sisältää reaaliluvut.

Määritelmä 3.5.1. Olkoon X epätyhjä joukko ja $f: X\to\mathbb{C}$. Määrittelemme funktion f **joukko-opillisen kantajan** asettamalla

$$\operatorname{supp}_{\mathrm{set}} f := \{x\in X \mid f(x)\neq 0\}.$$

Vertaa topologisen kantajan määritelmään 5.2.37.

Tehtäviä:

3.1 Osoita, että

$$\left(\frac{1}{k+1}\right)_{k=0}^{\infty}$$

on rationaalinen Cauchyn jono.

3.2 Osoita, että jokainen kompleksiluku (a,b), missä $a,b\in\mathbb{R}$, voidaan esittää muodossa $a+\mathrm{i}b$.

Luku 4

Vektoriavaruudet

4.1 Matriisit

Määritelmä 4.1.1. Määritellään **Kroneckerin delta**

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$$

kaikille $i, j \in \mathbb{N}$.

Määritelmä 4.1.2. Kun $n \in \mathbb{Z}_+$, niin määritellään

$$Z(n) := \{k \in \mathbb{Z}_+ \mid k \leq n\}.$$

Määritelmä 4.1.3. Olkoot $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Kutsumme funktiota $A : Z(n) \times Z(m) \to \mathbb{C}$ **matriisiksi**. Matriisia voidaan merkitä $(a_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,m}$, missä $a_{i,j} = A(i,j)$ kaikille $i \in Z(n)$ ja $j \in Z(m)$. Funktiota A kutsutaan myös n-riviseksi ja m-sarakkeiseksi matriisiksi. Jos $n = 1$, niin sanomme, että A on **vaakavektori**. Jos $m = 1$, niin sanomme, että A on **pystyvektori**. Jos $n = m = 1$, niin sanomme, että A on **skalaari**. Jos $n = m$, niin sanomme, että A on **neliömatriisi**.

Pystyvektoria voidaan merkitä myös $(a_k)_{k=1}^n$. Kompleksiset (ja vastaavasti reaaliset) n alkion pystyvektorit voidaan samaistaa karteesisen tulon $\mathbb{C}^n$ (ja vastaavasti $\mathbb{R}^n$) kanssa. Vaakavektorit voidaan samaistaa karteesisiin tuloihin samalla lailla.

Määritelmä 4.1.4. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$. Määritellään **yksikkövektorit**

$$\mathbf{e}_k^{[n]} := (\delta_{j,k})_{j=1}^n ,$$

missä $k \in Z(n)$.

Määritelmä 4.1.5. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$. Määritellään **yksikkömatriisi**

$$I_n := (\delta_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,n} .$$

Määritelmä 4.1.6. Olkoot $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Määritellään **nollamatriisi**

$$0_{n\times m} := (0)_{i=1,j=1}^{n,m}.$$

Matriisi voidaan konstruoida kirjoittamalla sen alkiot sulkeiden sisälle, esim.

$$A := (a_{i,j})_{i=1,j=1}^{3,4} := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6.5 & 0 \\ 3 & 9 & -\mathrm{i} & 0 \\ 5 & -5 & 1 & 2+4\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Ensimmäinen indeksi i ilmoittaa alkion rivin ja toinen indeksi j sen sarakkeen. Esim. $a_{1,2} = 7$ ja $a_{3,2} = -5$. Esimerkki vaakavektorista on

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & -10 \end{pmatrix}$$

ja pystyvektorista

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 8.5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Matriisien $(a_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,m}$ ja $(b_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,m}$ **summa** määritellään

$$(a_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,m} + (b_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,m} := (a_{i,j} + b_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,m}$$

ja **erotus**

$$(a_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,m} - (b_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,m} := (a_{i,j} - b_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,m}.$$

Matriisin $(a_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,m}$ **vastamatriisi** määritellään

$$-(a_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,m} := (-a_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,m}.$$

Matriisien $A := (a_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,m}$ ja $B := (b_{i,j})_{i=1,j=1}^{m,p}$ **matriisitulo** määritellään

$$AB := \left(\sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}\right)_{i=1,j=1}^{n,p}.$$

Määritelmä 4.1.7. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $A \in \mathbb{C}^{Z(n)\times Z(n)}$. Jos on olemassa neliömatriisi $B \in \mathbb{C}^{Z(n)\times Z(n)}$ siten, että $AB = I_n$ niin sanomme, että B on matriisin A **käänteismatriisi**, ja merkitsemme $A^{-1} := B$.

Huomautus 4.1.8. Käänteismatriisia ei välttämättä ole olemassa.

Määritelmä 4.1.9. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $A \in \mathbb{C}^{Z(n)\times Z(n)}$. Jos matriisin A käänteismatriisi on olemassa, niin sanomme, että A on **ei-singulaarinen**. Jos käänteismatriisia ei ole olemassa, niin sanomme, että A on **singulaarinen**.

Määritelmä 4.1.10. Olkoot $n, m \in \mathbb{Z}_+$ ja $A \in \mathbb{C}^{Z(n)\times Z(m)}$. Matriisin A **transpoosi** $A^T \in \mathbb{C}^{Z(m)\times Z(n)}$ määritellään asettamalla $A^T(i,j) := A(j,i)$ kaikille $i \in Z(m)$ ja $j \in Z(n)$. Matriisin A **Hermiten konjugaatti** $A^\dagger \in \mathbb{C}^{Z(m)\times Z(n)}$ määritellään asettamalla $A^\dagger(i,j) := A(j,i)^*$ kaikille $i \in Z(m)$ ja $j \in Z(n)$.

Vertaa vastaavaan määritelmään lineaarisille kuvauksille, 6.4.13.

Määritelmä 4.1.11. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $A \in \mathbb{C}^{Z(n)\times Z(n)}$. Sanomme, että

- A on **symmetrinen**, jos $A = A^T$.
- A on **hermiittinen**, jos $A = A^\dagger$.
- A on **ortogonaalinen**, jos $A^{-1} = A^T$.
- A on **unitaarinen**, jos $A^{-1} = A^\dagger$.

Vertaa vastaavaan määritelmään lineaarisille funktioille, 6.4.14.

Määritelmä 4.1.12. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $A \in \mathbb{C}^{Z(n)\times Z(n)}$. Jos

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

missä $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{Z(n)\times Z(1)}$ on pystyvektori, $\mathbf{v} \neq 0_{n\times 1}$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$, niin sanomme, että λ on matriisin A **ominaisarvo** ja $\mathbf{v}$ sitä vastaava **ominaisvektori**.

Vertaa määritelmään 4.2.20.

Lause 4.1.13. *Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $A \in \mathbb{C}^{Z(n)\times Z(n)}$. Tällöin matriisi A on singulaarinen, jos ja vain jos sillä on ominaisarvo 0.*

4.2 Vektoriavaruudet

Määritelmä 4.2.1. Olkoon V epätyhjä joukko, K kunta, ja $+ : V \times V \to V$ ja $\cdot : K \times V \to V$ funktioita. Tuloa $c \cdot v$ merkitään myös cv. Sanomme, että $(V, K, +, \cdot)$ on **vektoriavaruus** ja K sen **kerroinkunta**, jos seuraavat aksioomat ovat voimassa:

(V1) $\forall v, w, z \in V : v + (w + z) = (v + w) + z$

(V2) $\forall v, w \in V : v + w = w + v$

(V3) $\exists 0_V \in V : \forall v \in V : v + 0_V = 0_V + v = v$

(V4) $\forall x \in V : \exists y \in V : x + y = 0_V$

(V5) $\forall a \in K, v, w \in V : a(v + w) = av + aw$

(V6) $\forall a, b \in K, x \in V : (a + b)x = ax + bx$

(V7) $\forall a, b \in K, x \in V : a(bx) = (ab)x$

(V8) $\forall v \in V : 1_K v = v$

Vektoriavaruuden alkioita kutsutaan **vektoreiksi**. Vektoriavaruudesta käytetään myös nimeä **lineaarinen avaruus**. Nollavektoria 0_V merkitään yleensä 0. Operaatiota $+$ kutsutaan vektorien **summaksi** ja operaatiota $\cdot$ skalaarin ja vektorin **tuloksi**. Aksiooman (V4) mukaista alkiota y kutsutaan vektorin x **vastavektoriksi** ja sitä merkitään $-x$.

Esimerkkejä:

1. Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ ja kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ varustettuna normaalilla summalla ja tulolla ovat vektoriavaruuksia. Ne ovat itse itsensä kerroinkuntia.

2. Joukko $\{0\}$ on vektoriavaruus.

3. Kun $n, m \in \mathbb{Z}_+$, niin kaikki n-riviset ja m-sarakkeiset kompleksiset (ja vastaavasti reaaliset) matriisit muodostavat vektoriavaruuden kerroinkunnalla $\mathbb{C}$ (vastaavasti $\mathbb{R}$).

4. Karteesinen tulo K^n, missä $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $K = \mathbb{R}$ tai $K = \mathbb{C}$ on vektoriavaruus. Summa määritellään alkioittain:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$$

ja skalaarin ja vektorin tulo:

$$c \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ \vdots \\ ca_n \end{pmatrix}, \quad c \in K, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n.$$

5. Olkoon $V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ kaikkien reaalifunktioiden joukko. Määritellään funktioiden yhteenlasku asettamalla

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

kaikille $f, g \in V, x \in \mathbb{R}$ ja skalaarin ja funktion tulo asettamalla

$$(c \cdot f)(x) := (cf)(x) := cf(x)$$

kaikille $f \in V, c, x \in \mathbb{R}$. Nyt $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ on vektoriavaruus.

Lause 4.2.2. *Olkoon V vektoriavaruus kerroinkunnalla K ja $v \in V$. Nyt*

(i) $0_K v = 0_V$;

(ii) $(-1)v = -v$.

Todistus harjoitustehtävänä.

Määritelmä 4.2.3. Olkoon V vektoriavaruus kerroinkunnalla K ja $L \subset V$ (mahdollisesti ääretön) joukko avaruuden V vektoreita. Sanomme, että L on **lineaarisesti riippumaton**, jos

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0 \implies \forall k \in Z(n) : a_k = 0$$

kaikille joukon L äärellisille osajoukoille $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ja kaikille skalaareille $a_k \in K$, $k \in Z(n)$. Jos L ei ole lineaarisesti riippumaton, niin sanomme, että se on **lineaarisesti riippuva**.

Määritelmä 4.2.4. Olkoon V vektoriavaruus kerroinkunnalla K, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x_1, \ldots, x_n \in V$ ja $a_1, \ldots, a_n \in K$. Lauseketta

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

sanotaan **lineaarikombinaatioksi**.

Määritelmä 4.2.5. Olkoon V vektoriavaruus kerroinkunnalla K ja $A \subset V$. Sanomme, että A on vektoriavaruuden V **vektorialiavaruus**, jos A on itse vektoriavaruus. Tällöin merkitään $A \subset_{\text{v.s.}} V$.

Lause 4.2.6. *Olkoon V vektoriavaruus kerroinkunnalla K ja $A \subset V$, $A \neq \emptyset$. Joukko A on vektoriavaruuden V vektorialiavaruus jos ja vain jos seuraavat ehdot ovat voimassa:*

(A1) $\forall x, y \in A : x + y \in A$

(A2) $\forall x \in A, a \in K : ax \in A$

Todistus. Jos $A \subset_{\text{v.s.}} V$, niin A on vektoriavaruus, joten se on suljettu summan ja skalaarilla kertomisen suhteen.

Oletetaan että lauseen ehdot (A1) ja (A2) ovat voimassa. Siis A on suljettu summan ja skalaarilla kertomisen suhteen. Vektoriavaruuden aksioomat (V1), (V2), (V5), (V6), (V7) ja (V8) ovat tosia, koska ne ovat tosia koko avaruudessa V mukaanlukien joukon A. Olkoon $a \in A$ mielivaltainen. Nyt $0_V = a - a \in A$. Täten aksiooma (V3) on voimassa. Aksiooma (V4) on voimassa ehdon (A2) lauseen 4.2.2 kohdan (ii) nojalla. Siis A on vektoriavaruus ja $A \subset_{\text{v.s.}} V$. $\square$

Esimerkkejä:

1. Olkoon $V = \mathbb{R}^2$ (kaikkien tasovektoreiden joukko), kerroinkunta $\mathbb{R}$, ja $\mathbf{v} \in V$. Asetetaan
$$A := \{a\mathbf{v} \mid a \in \mathbb{R}\}.$$
Nyt A on vektoriavaruuden V vektorialiavaruus.

Määritelmä 4.2.7. Kun V on vektoriavaruus kerroinkunnalla K ja A avaruuden V vektorialiavaruus, niin määritellään **jäännösluokka**

$$v + A := \{v + a \mid a \in A\}, \quad v \in V.$$

Määritellään **jäännösluokka-avaruus** asettamalla

$$V/A := \{v + A \mid v \in V\}$$

ja laskutoimitukset

$$\begin{aligned} (u + A) + (v + A) &= (u + v) + A, && (4.1) \\ \alpha(u + A) &= \alpha u + A, && (4.2) \end{aligned}$$

missä $u, v \in V$ ja $\alpha \in K$. Olkoon $0_{V/A} := 0 + A = A$

Lause 4.2.8. *Olkoon V on vektoriavaruus kerroinkunnalla K ja A avaruuden V vektorialiavaruus. Nyt*

(1)
$$\bigcup_{J \in V/A} J = V.$$

(2) Joukon V/A alkiot ovat erillisiä.

(3) Laskutoimitukset (4.1) *ja* (4.2) *ovat hyvin määriteltyjä.*

(4) Joukko V/A varustettuna laskutoimituksilla (4.1) *ja* (4.2) *on vektoriavaruus, jonka kerroinkunta on K.*

Todistus. Vertaa lauseen 1.4.11 todistukseen.

(1) Kun $x \in V$, niin $x + A \in V/A$ ja $x + A \subset V$, joten

$$\bigcup_{J \in V/A} J = V$$

(2) Jos $V\ /A = \{A\}$ (eli $A = V$), niin (2) on tosi. Oletetaan, että joukossa $V\ /A$ on enemmän kuin yksi alkio. Olkoon $M := x + A$, $x \in V$, $N := y + A$, $y \in V$ ja $M \neq N$.

Oletamme nyt, että olisi $M \cap N \neq \emptyset$ (vastaoletus). Olkoon $z \in M \cap N$. Nyt $z = x + a_1 = y + a_2$ joillekin $a_1, a_2 \in A$. Jos $m \in M$, niin $m = x + a_3$ eräälle $a_3 \in A$. Olkoon $a_4 := a_2 - a_1 + a_3 \in A$. Nyt $y + a_4 = y + a_2 - a_1 + a_3 = x + a_3 = m$, joten $m = y + a_4 \in y + A = N$. Täten $M \subset N$. Vastaavasti osoitetaan, että $N \subset M$, joten $M = N$. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on väärä, ja $M \cap N = \emptyset$.

(3)

(3.1) Osoitetaan, että $(u+v)+A=(u'+v')+A$, kun $u+A=u'+A$ ja $v+A=v'+A$, $u,v,u',v'\in V$. Oletetaan, että $p\in(u+v)+A$. Nyt $p=u+v+a$ eräälle $a\in A$. Edelleen $u+a=u'+a'$ ja $v+a=v'+a''$, missä $a',a''\in A$. Nyt

$$\begin{aligned} p &= u+v+a=u'+a'-a+v'+a''-a=u'+v'+a'+a''-2a \\ &\in (u'+v')+A. \end{aligned}$$

Siis $(u+v)+A\subset(u'+v')+A$. Vastaavasti osoitetaan, että $(u'+v')+A\subset(u+v)+A$. Täten

$$(u+v)+A=(u'+v')+A.$$

(3.2) Osoitetaan, että $\alpha u+A=\alpha u'+A$, kun $u+A=u'+A$, $u,u'\in V$. Olkoon $p=\alpha u+b$ eräälle $b\in A$. Nyt $u+b=u'+b'$ eräälle $b'\in A$. Edelleen $u=u'+b'-b$. Siten

$$\alpha u+a=\alpha u'+\alpha b'-\alpha b+b=\alpha u'+c\in\alpha u'+A,$$

missä $c:=\alpha b'-\alpha b+b\in A$. Siten $\alpha u+A\subset\alpha u'+A$. Vastaavasti osoitetaan, että $\alpha u'+A\subset\alpha u+A$. Täten $\alpha u+A=\alpha u'+A$.

(4) Osoitetaan, että V/A on vektoriavaruus. Kun $x+A,y+A\in V/A$, niin

$$(x+y)+A=\{x+y+a\mid a\in A\}\in V/A.$$

Kun $\alpha\in K$ ja $x\in V/A$, niin

$$\alpha x+A=\{\alpha x+a\mid a\in A\}\in V/A.$$

(V1): $(a+A)+((b+A)+(c+A))=(a+b+c)+A=((a+A)+(b+A))+(c+A)$,

(V2): $(a+A)+(b+A)=(a+b)+A=(b+a)+A=(b+A)+(a+A)$,

(V3): $(a+A)+0_{V/A}=(a+A)+(0_K+A)=(a+0_K)+A=a+A$,

(V4): $(a+A)+((-a)+A)=(a+(-a))+A=0+A=A=0_{V/A}$

(V5): $c((a+A)+(b+A))=(ca+cb)+A=c(a+A)+c(b+A)$,

(V6): $(c+d)(a+A)=(ca+da)+A$.

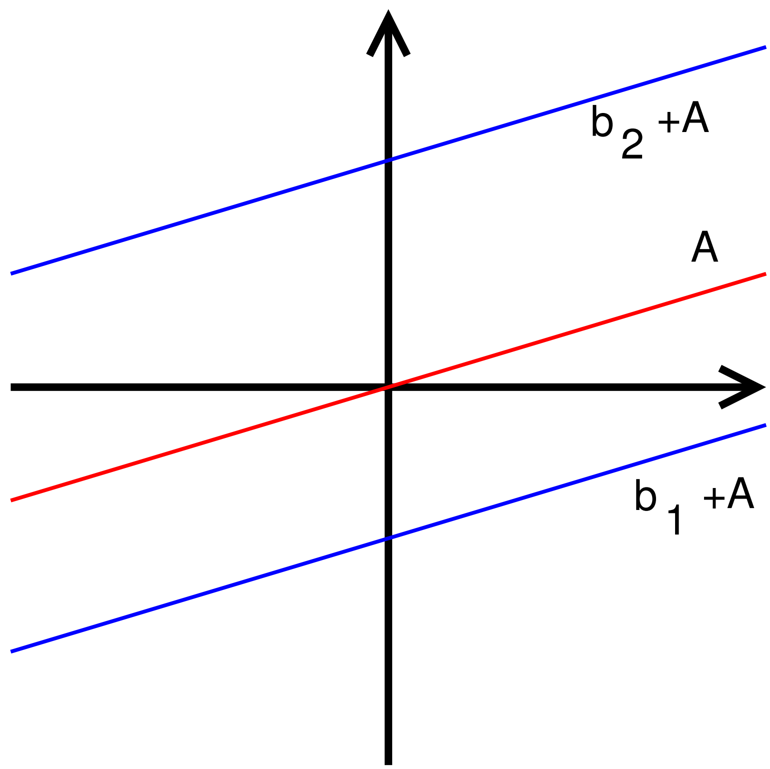
(V7): $c(d(a+A))=c(da+A)=(cd)(a+A)$.

(V8): $1(a+A)=a+A$.

missä $a,b\in V$ ja $c,d\in K$. Täten V/A on vektoriavaruus. □

Jäännösluokkia on havainnollistettu kuvassa 4.2.

Kuva 4.1: Suora $A := \{(x, ax) \mid x \in \mathbb{R}\}$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus. Sen jäännösluokat ovat suorat $b + A = \{(x, ax + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$.



Määritelmä 4.2.9. Olkoon V vektoriavaruus kerroinkunnalla K ja $A \subset V$, $A \neq \emptyset$. Olkoon

$$S := \{B \mid B \subset_{\text{v.s.}} V \wedge A \subset B\}.$$

Määritellään

$$\operatorname{span} A := \bigcap_{J \in S} J.$$

Nyt $\operatorname{span} A$ on vektoriavaruus, jota kutsutaan joukon A **virittämäksi vektori-avaruudeksi**.

Lause 4.2.10. *Olkoon V vektoriavaruus kerroinkunnalla K ja $A \subset V$, $A \neq \emptyset$. Nyt*

$$\operatorname{span} A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_+, x_k \in V, a_k \in K, k \in Z(n) \right\}. \tag{4.3}$$

Huomautus 4.2.11. Lineaarikombinaatio yhtälössä (4.3) on aina äärellinen vaikka joukko A olisi ääretön.

Määritelmä 4.2.12. Olkoon V vektoriavaruus ja $L \subset V$ lineaarisesti riippumaton. Jos $\operatorname{span} L = V$, niin sanomme, että L on vektoriavaruuden V **(Hamelin) kanta**.

Voidaan osoittaa, että jokaisella vektoriavaruudella on kanta ja kaikkien tietyn vektoriavaruuden kantojen mahtavuus on sama. Jos vektoriavaruudella on äärellinen kanta, niin sanomme, että vektoriavaruus on **äärellisulotteinen**. Muussa tapauksessa sanomme, että vektoriavaruus on **ääretönulotteinen**.

Määritelmä 4.2.13. Olkoot V ja W vektoriavaruuksia kerroinkunnalla K ja olkoon $f : V \to W$ funktio. Sanomme, että f on **lineaarinen**, jos

(1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

(2) $f(ax) = af(x)$

kaikille $x, y \in V$ ja $a \in K$.

Huomautus 4.2.14. n rivin ja m sarakkeen matriisi kunnassa K voidaan tulkita lineaariseksi funktioksi vektoriavaruudelta K^m vektoriavaruuteen K^n asettamalla

$$A(v) := Av, \quad v \in K^n,$$

missä yhtälön oikea puoli on matriisitulo ja v tulkitaan n alkion pystyvektoriksi.

Määritelmä 4.2.15. Olkoon V vektoriavaruus kerroinkunnalla K. Määritellään vektoriavaruuden V **algebrallinen duaali** asettamalla

$$V^\sharp := \{f : V \to K \mid f \text{ on lineaarinen}\}.$$

Määritelmä 4.2.16. Olkoot V ja W vektoriavaruuksia kerroinkunnalla K. Olkoon $f : V \twoheadrightarrow W$ lineaarinen surjektio. Sanomme, että f on **homomorfismi** avaruudelta V avaruudelle W ja avaruudet V ja W ovat **homomorfiset**. Jos lisäksi f on bijektio, niin sanomme, että f on **(algebrallinen) isomorfismi** ja avaruudet V ja W ovat **isomorfisia**.

Isomorfisten vektoriavaruuksien rakenne on sama.

Määritelmä 4.2.17. Olkoon V vektoriavaruus ja M ja N sen aliavaruuksia. Määritellään aliavaruuksien M ja N **summa**

$$M + N := \{m + n \mid, m \in M, n \in N\}.$$

Jos $M \cap N = \{0\}$, niin sanomme, että $M + N$ on **suora summa**, ja sitä merkitään $M \oplus N$.

Lause 4.2.18. *Olkoon V vektoriavaruus ja M ja N sen aliavaruuksia. Summa $M + N$ on suora, jos ja vain jos jokaisen vektorin $x \in M + N$ esitys $x = m + n$, $m \in M$, $n \in N$, on yksikäsitteinen.*

Todistus.

1. Oletetaan ensin, että $M \cap N = \{0\}$. Olkoon $x \in M + N$, $x = m + n$, missä $m \in M$ ja $n \in N$. Oletetaan, että olisi $x = m' + n'$, $m' \in M$, $n' \in N$ ja $m' \neq m$ tai $n' \neq n$. Nyt $x = m + n = m' + n'$, joten $m - m' = n' - n \neq 0$. Toisaalta $m - m' = n' - n \in M \cap N$. Siis $M \cap N \neq \{0\}$. Tämä on ristiriita, joten esitys $x = m + n$ on yksikäsitteinen.

2. Oletetaan, että jokaisen vektorin $x \in M + N$ esitys $x = m + n$, $m \in M$, $n \in N$, on yksikäsitteinen. Oletetaan, että olisi $y \in M + N$ ja $y \neq 0$. Olkoon $x \in M + N$ eli $x = m + n$, $m \in M$ ja $n \in N$. Nyt $x = m + n = (m + y) + (n - y)$, missä $m + y \in M$ ja $n - y \in N$. Siten esitys $x = m + n$ ei ole yksikäsitteinen. Tämä on ristiriita, joten on oltava $M \cap N = \{0\}$.

$\square$

Määritelmä 4.2.19. Olkoot V ja W vektoriavaruuksia kerroinkunnalla K. Olkoon $f : V \to W$ lineaarinen funktio. Määritellään funktion f **ydin**

$$\ker f := \{x \in V \mid f(x) = 0\}$$

ja **kuva-avaruus**

$$\operatorname{im} f := f[V].$$

Määritelmä 4.2.20. Olkoon V vektoriavaruus kerroinkunnalla K ja $f : V \to V$ lineaarinen funktio. Jos

$$f(v) = \lambda v$$

missä $v \in V$, $v \neq 0$ ja $\lambda \in K$, niin sanomme, että λ on funktion f **ominaisarvo** ja v sitä vastaava **ominaisvektori**.

Vertaa määritelmään 4.1.12. Kun matriisit tulkitaan lineaarisiksi kuvauksiksi, niin molemmat määritelmät ovat ekvivalentteja.

Määritelmä 4.2.21. Olkoon V vektoriavaruus kerroinkunnalla $K = \mathbb{R}$ tai $K = \mathbb{C}$. Olkoon $A \subset V$. Sanomme, että A on **konveksi**, jos $tA + (1-t)A \subset A$ jokaiselle $t \in [0,1]$. Sanomme, että A on **balansoitu**, jos $\alpha A \subset A$ jokaiselle $\alpha \in K$.

Määritelmä 4.2.22. Olkoon V vektoriavaruus ei-diskreetillä kerroinkunnalla K ja $A, B \subset V$. Sanomme, että A **absorboi** joukon B, jos on olemassa $\lambda_0 \in K$ siten, että $B \subset \lambda A$ kaikille $|\lambda| \geq |\lambda_0|$. Olkoon $U \subset V$. Sanomme, että U on **radiaalinen (absorboiva)**, jos U absorboi jokaisen avaruuden V äärellisen osajoukon. Sanomme, että U on **rengastettu**, jos $\lambda U \subset U$ kaikille $|\lambda| \leq 1$.

Tehtäviä:

4.1 Laske matriisitulo

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 8 & -5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

4.2 Laske matriisitulo

$$\begin{pmatrix} -10 & 7 & 5 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 9 \\ 0 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -1 & 0 \\ 1 & 8 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

4.3 Olkoot V ja W vektoriavaruuksia kerroinkunnalla K ja $f : V \to W$ lineaarinen funktio. Osoita, että $\ker f$ on avaruuden V aliavaruus.

4.4 Olkoot V ja W vektoriavaruuksia kerroinkunnalla K ja $f : V \to W$ lineaarinen funktio. Osoita, että $\operatorname{im} f$ on avaruuden W aliavaruus.

4.5 Olkoot $n, m, p \in \mathbb{Z}_+$. Olkoon A nxp-reaalimatriisi ja B pxm-reaalimatriisi. Olkoon $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ matriisia A vastaava lineaarinen funktio ja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ matriisia B vastaava lineaarinen funktio. Osoita, että

$$f(g(\mathbf{v})) = AB\mathbf{v}$$

kaikille reaalisille mx1-pystyvektoreille $\mathbf{v}$.

4.6 Todista lause 4.2.2.

Luku 5

Topologiset avaruudet

Tässä luvussa on käytetty lähteitä [10, 24, 32, 31].

5.1 Jonot, verkot ja filtterit

Määritelmä 5.1.1. Olkoon A epätyhjä joukko. Sanomme, että funktio $f \in A^{\mathbb{N}}$ on **jono**.

Jonoa merkitään yleensä $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ tai vain (a_k), missä $a_k = f(k)$, $k \in \mathbb{N}$. Jos $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ on jono joukon A alkioita, niin merkitään $(a_k)_{k=0}^{\infty} \subset A$. Kun A on kunta, niin jonot lasketaan yhteen ja vähennetään alkioittain, ja myös vastaluku lasketaan alkioittain. Jono kerrotaan ja jaetaan kunnan A alkiolla alkioittain.

$$\begin{aligned}
(a_k)_{k=0}^{\infty} + (b_k)_{k=0}^{\infty} &:= (a_k + b_k)_{k=0}^{\infty} \\
(a_k)_{k=0}^{\infty} - (b_k)_{k=0}^{\infty} &:= (a_k - b_k)_{k=0}^{\infty} \\
-(a_k)_{k=0}^{\infty} &:= (-a_k)_{k=0}^{\infty} \\
c \cdot (a_k)_{k=0}^{\infty} &:= (ca_k)_{k=0}^{\infty} \\
(a_k)_{k=0}^{\infty} / c &:= \left(\frac{a_k}{c}\right)_{k=0}^{\infty}, \quad c \neq 0
\end{aligned}$$

missä $a_k, b_k \in A$, $k \in \mathbb{N}$, ja $c \in A$.

Määritelmä 5.1.2. Olkoon $(a_k)_{k=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Määritellään jonon $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ **raja-arvo** b asettamalla

$$\lim_{k \to \infty} a_k = b,$$

jos ja vain jos

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : (k > n \implies |a_k - b| < \varepsilon).$$

Tällöin sanomme, että raja-arvo $\lim_{k \to \infty} a_k$ on olemassa. Asetetaan

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \infty,$$

jos ja vain jos

$$\forall m \in \mathbb{R}_+ : \exists n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : (k > n \implies |a_k| > m)$$

ja

$$\lim_{k\to\infty} a_k = -\infty,$$

jos ja vain jos

$$\lim_{k\to\infty} (-a_k) = \infty.$$

Olkoon

$$s_k := \sum_{j=0}^{k} a_k,$$

missä $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Jonoa $(s_k)_{k=0}^{\infty}$ sanotaan **sarjan osasummien jonoksi**. Osasummien jonon raja-arvoa merkitään

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

ja tätä merkintää sanotaan **sarjaksi**.

Määritelmä 5.1.3. Olkoon X epätyhjä joukko ja A suunnattu joukko. **Verkko** on funktio $f : A \to X$, ja sitä merkitään yleensä $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ tai vain (x_α), missä $x_\alpha = f(\alpha)$. Merkintä $(x_\alpha) \subset X$ tarkoittaa, että (x_α) on verkko joltakin suunnatulta joukolta joukkoon X.

Esimerkkejä:

1. Jokainen totaalisesti järjestetty joukko on suunnattu. Erityisesti luonnollisten lukujen joukko on suunnattu, joten jokainen jono on myös verkko.

2. Olkoon X topologinen avaruus ja $x \in X$. Olkoon N kaikkien pisteen x ympäristöjen joukko ja määritellään $A \geq B \iff B \subset A$ kaikille $A, B \in N$. Nyt N on verkko.

Määritelmä 5.1.4. Olkoon (x_α) verkko suunnatulta joukolta A epätyhjään joukkoon X ja $P(x)$, $x \in X$, predikaatti.

Sanomme, että $P(x_\alpha)$ on **lopulta tosi**, jos on olemassa $\alpha \in A$ siten, että jokaiselle $\beta \in A$, $\beta \geq \alpha$, predikaatti $P(x_\beta)$ on tosi.

Sanomme, että (x_α) on **usein tosi**, jos jokaiselle $\alpha \in A$ on olemassa $\beta \in A$, $\beta \geq \alpha$ siten, että $P(x_\beta)$ on tosi.

Sanomme, että (x_α) on **universaali**, jos jokaiselle $A \subset X$ on $x_\alpha \in A$ lopulta tosi tai $x_\alpha \in X \setminus A$ lopulta tosi.

Määritelmä 5.1.5. Olkoon X joukko ja $I \subset 2^X$. Sanomme, että I on **filtteri** avaruudessa X, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(i) $I \neq \emptyset \wedge \emptyset \notin I$.

(ii) $F \in I \wedge F \subset G \subset X \implies G \in I$.

(iii) $F \in I \wedge G \in I \implies F \cap G \in I$.

Määritelmä 5.1.6. Olkoon X joukko ja $B \subset 2^X$. Sanomme, että B on **filtterikanta**, jos

(i) $B \neq \emptyset \wedge \emptyset \notin B$.

(ii) Jos $B_1 \in B$ ja $B_2 \in B$, niin on olemassa $B_3 \in B$ siten, että $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Jokainen filtterikanta B generoi yksikäsitteisen filtterin I siten, että $F \in I$, jos ja vain jos $A \subset F$ ainakin yhdelle $A \in B$. Sanomme, että B on filtterin I kanta. Olkoot I_1 ja I_2 filttereitä joukossa X. Jos $I_1 \subset I_2$ sanomme, että I_1 on **karkeampi** kuin I_2 ja I_2 on **hienompi** kuin I_1.

5.2 Yleiset topologiset avaruudet

Määritelmä 5.2.1. Olkoon T epätyhjä joukko ja $\tau \subset 2^T$. Sanomme, että τ on avaruuden T **topologia**, jos seuraavat aksioomat ovat voimassa:

(T1) $\emptyset \in \tau$ ja $T \in \tau$.

(T2) Olkoon $I \subset \tau$. Nyt

$$\bigcup_{C \in I} C \in \tau.$$

(T3) Olkoon I joukon τ *äärellinen* osajoukko. Nyt

$$\bigcap_{C \in I} C \in \tau.$$

Paria (T, τ) sanotaan **topologiseksi avaruudeksi**.

Topologian τ alkioita sanotaan **avoimiksi joukoiksi**. Sanomme, että osajoukko $B \subset A$ on suljettu, jos ja vain jos $A \setminus B$ on avoin, ts. $A \setminus B \in \tau$.

Määritelmä 5.2.2. Olkoon (T, τ) topologinen avaruus. Sanomme, että joukko $B \subset \tau$ on topologian τ **kanta**, jos

$$\forall C \in \tau : \exists D \in 2^B : C = \bigcup_{J \in D} J.$$

Määritelmä 5.2.3. Olkoon (T, τ) topologinen avaruus ja $U \subset T$, $U \neq \emptyset$. Asetetaan

$$\upsilon := \{V \cap U \mid V \in \tau\}.$$

Nyt (U, υ) on topologinen avaruus, jotka kutsutaan topologisen avaruuden **topologiseksi aliavaruudeksi**. Joukkoa υ sanotaan avaruuden U **relatiiviseksi topologiaksi**.

Lause 5.2.4. *Edellisessä määritelmässä υ on topologia joukossa U.*

Todistus. Nyt $\emptyset = \emptyset \cap U \in \upsilon$ ja $U = T \cap U \in \upsilon$. Olkoon $(K_\lambda)_{\lambda \in I} \subset \upsilon$, missä I on mielivaltainen joukko. Nyt $K_\lambda = L_\lambda \cap U$, $L_\lambda \in \tau$, kaikille $\lambda \in I$. Edelleen

$$\bigcup_{\lambda \in I} K_\lambda = \bigcup_{\lambda \in I} (L_\lambda \cap U) = \left(\bigcup_{\lambda \in I} L_\lambda \right) \cap U \in \upsilon.$$

Oletetaan sitten, että $M, N \in \upsilon$. Nyt $M = P \cap U$ ja $N = Q \cap U$, missä $P, Q \in \tau$. Siten

$$M \cap N = (P \cap U) \cap (Q \cap U) = (P \cap Q) \cap U \in \upsilon.$$

□

Määritelmä 5.2.5. Olkoon T joukko ja τ ja υ joukon T topologioita. Sanomme, että τ on **hienompi** kuin υ, jos $\upsilon \subset \tau$. Sanomme, että τ on **karkeampi** kuin υ, jos $\tau \subset \upsilon$.

Huomautus 5.2.6. On myös mahdollista, että τ ei ole hienompi eikä karkeampi kuin υ.

Määritelmä 5.2.7. Olkoon (T, τ) topologinen avaruus ja $x \in T$. Sanomme, että joukko $Y \subset T$ on pisteen x **ympäristö**, jos on olemassa avoin joukko $A \subset T$ siten, että $x \in A$ ja $A \subset Y$. Jos Y on avoin, niin sanomme sitä pisteen x **avoimeksi ympäristöksi**.

Ympäristön käsitettä on havainnollistettu kuvassa 5.2.

Määritelmä 5.2.8. Olkoon (T, τ) topologinen avaruus ja $x \in T$. Pisteen x kaikki ympäristöt muodostavat pisteen x **ympäristöfiltterin**, jota merkitään U_x. Olkoon B jokin filtterin U_x kanta. Sanomme, että B on pisteen x **ympäristökanta**.

Määritelmä 5.2.9. Olkoon (T, τ) topologinen avaruus ja $x \in T$. Olkoon I filtteri joukossa T. Sanomme, että I suppenee pisteeseen x, jos I on hienompi kuin U_x.

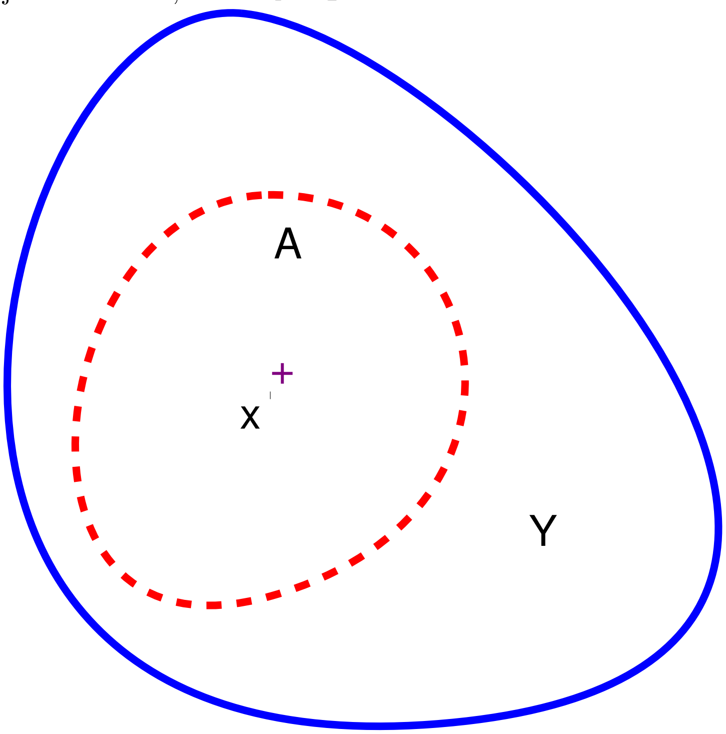
Lause 5.2.10. *Olkoon T topologinen avaruus ja $A \subset T$. Joukko A on avoin, jos ja vain jos jokaisella pisteellä $x \in A$ on avoin ympäristö Y siten, että $Y \subset A$.*

Todistus. Jos A on avoin, niin A on jokaisen pisteen $x \in A$ avoin ympäristö. Oletetaan, että jokaisella $x \in A$ on avoin ympäristö Y siten, että $Y \subset A$. Olkoon $Y(x)$ jokin pisteen x avoin ympäristö jokaiselle $x \in B$. Nyt

$$\bigcup_{x \in A} Y(x) = A.$$

Avoimien joukkojen mielivaltainen unioni on avoin, joten A on avoin. □

Kuva 5.1: Joukko Y on pisteen x ympäristö, jos ja vain jos on olemassa avoin joukko A siten, että $x \in A \subset Y$.



Määritelmä 5.2.11. Olkoon (T, τ) topologinen avaruus. Sanomme, että (T, τ) toteuttaa **Hausdorffin erotusaksiooman**, jos jokaiselle kahdelle eri pisteelle $x, y \in T$ on olemassa pisteen x ympäristö Y ja pisteen y ympäristö Z siten, että $Y \cap Z = \emptyset$. Jos (T, τ) toteuttaa Hausdorffin erotusaksiooman, niin sanomme, että (T, τ) on **Hausdorffin avaruus**.

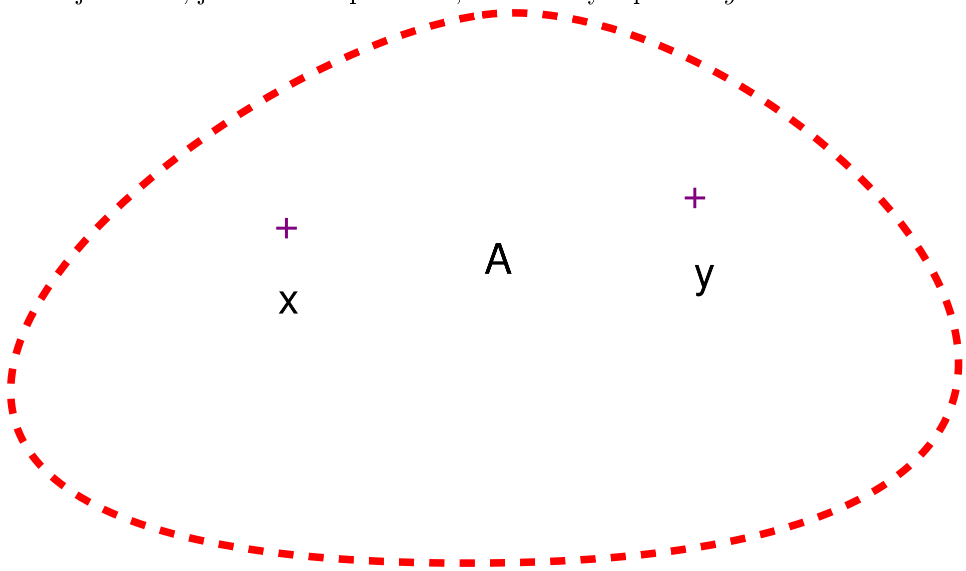
Huomautus 5.2.12. Yleisesti raja-arvo ei välttämättä ole yksikäsitteinen, eli jonolla tai funktiolla voi olla useampia raja-arvoja samassa pisteessä. Hausdorffin avaruuksissa raja-arvot ovat yksikäsitteisiä. Kuvassa 5.2 on havainnollistettu Hausdorffin erotusaksioomaa.

Määritelmä 5.2.13. Olkoon (x_α) verkko topologisessa avaruudessa T. Sanomme, että verkko **suppenee kohti pistettä** $y \in T$, jos jokaiselle pisteen y ympäristölle Y verkko (x_α) kuuluu lopulta joukkoon Y. Tällöin merkitsemme $x_\alpha \to y$. Jos T on Hausdorffin avaruus, niin raja-arvo on yksikäsitteinen, ja merkitsemme

$$\lim x_\alpha = y.$$

Määritelmä 5.2.14. Olkoon (x_α) verkko topologisessa avaruudessa T. Sanomme, että $y \in T$ on verkon (x_α) **kasautumispiste**, jos jokaiselle pisteen y ym-

Kuva 5.2: Tilanne, jossa Hausdorffin erotusaksiooma ei ole voimassa. Jokainen avoin joukko A, joka sisältää pisteen x, sisältää myös pisteen y.



päristölle Y verkko (x_α) on usein joukossa Y.

Lause 5.2.15. *Olkoon T topologinen avaruus ja $A \subset T$. Tällöin A on suljettu, jos ja vain jos jokaiselle verkolle $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset A$ on*

$$x_\alpha \to a \in T \implies a \in A.$$

Todistus. Jos $A = \emptyset$ or $A = T$, niin väite on tosi. Oletetaan, että $A \neq \emptyset$ ja $A \neq T$. Olkoot A suljettu, $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset A$ verkko, ja $x_\alpha \to a \in T$. Oletetaan, että olisi $a \notin A$ eli $a \in T \setminus A$ (vastaoletus). Joukko $T \setminus A$ on avoin, joten lauseen 5.2.10 nojalla on olemassa pisteen a ympäristö Y siten, että $Y \subset T \setminus A$. Kaikille x_α, $\alpha \in I$, on $x_\alpha \notin Y$, joten x_α ei voi olla lopulta joukossa Y. Siten $x_\alpha \not\to a$, mikä on ristiriita, joten on oltava $a \in A$.

Oletetaan sitten, että

$$x_\alpha \to a \in T \implies a \in A.$$

jokaiselle verkolle $(x_\alpha) \subset A$. Olkoon $x \in T \setminus A$. Ei ole olemassa verkkoa $(x_\alpha) \subset A$ siten, että $x_\alpha \to x$. Oletetaan, että $Y \cap A \neq \emptyset$ jokaiselle pisteen x ympäristölle Y (avaruudessa T). Olkoon

$$V := \{Y \mid Y \text{ on pisteen } x \text{ ympäristö avaruudessa } T\}.$$

Kun $Y_1, Y_2 \in V$, niin määritellään

$$Y_1 \geq Y_2 \iff Y_1 \subset Y_2.$$

Nyt $(V, \geq)$ on suunnattu joukko. Kun $Y \in V$ niin valitaan $x_Y \in Y \cap A$. Nyt $x_Y \to x$, mikä on ristiriita, joten pisteellä x on ympäristö Y_0 siten, että $Y_0 \cap A = \emptyset$. Piste x oli mielivaltainen, joten lauseen 5.2.10 nojalla $T \setminus A$ on avoin, ja siten A on suljettu. □

Määritelmä 5.2.16. Olkoon T topologinen avaruus ja $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subset T$ jono. Sanomme, että jono $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subset T$ suppenee kohti pistettä $y \in X$, jos jokaiselle pisteen y ympäristölle Y on olemassa $m \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \in Y$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m$. Jos T on Hausdorffin avaruus, niin raja-arvo on yksikäsitteinen, ja merkitsemme

$$\lim_{k \to \infty} x_k = y.$$

Määritelmä 5.2.17. Olkoot (T, τ) ja (U, υ) topologisia avaruuksia, $f \in U^T$ ja $x_0 \in T$. Sanomme, että piste $y \in U$ on funktion f **raja-arvo** pisteessä x_0, jos jokaiselle pisteen y ympäristölle $Z \subset U$ on olemassa pisten x_0 ympäristö $Y \subset T$ siten, että $f[Y] \subset Z$. Jos U on Hausdorffin avaruus, niin raja-arvo on yksikäsitteinen, ja merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y.$$

Määritelmä 5.2.18. Olkoot (T, τ) ja (U, υ) topologisia avaruuksia, $f \in U^T$ ja $x \in T$. Sanomme, että f on **jatkuva** pisteessä x, jos jokaiselle pisteen $f(x)$ ympäristölle $Z \subset U$ on olemassa pisteen x ympäristö $Y \subset T$ siten, että $f[Y] \subset Z$. Jos f jatkuva kaikissa pisteissä $x \in T$, niin sanomme, että f on **jatkuva**.

Huomautus 5.2.19. Jatkuvuuden määritelmässä ympäristö voidaan korvata avoimella ympäristöllä, ts. jokaiselle pisteen $f(x)$ avoimelle ympäristölle $Z \subset U$ on olemassa pisteen x avoin ympäristö $Y \subset T$ siten, että $f[Y] \subset Z$.

Lause 5.2.20. *Olkoot T ja U topologisia avaruuksia ja $f : T \to U$ funktio. Funktio f on jatkuva pisteessä $x_0 \in T$, jos ja vain jos jokaiselle verkolle $(x_\alpha) \subset T$ on voimassa*

$$x_\alpha \to x_0 \implies f(x_\alpha) \to f(x_0).$$

Vertaa lauseeseen 5.2.40.

Määritelmä 5.2.21. Olkoot T ja U topologisia avaruuksia ja f kuvaus avaruudelta T avaruuteen U. Sanomme, että f on **avoin**, jos $f[A]$ on avoin avaruudessa U aina, kun A on avoin avaruudessa T.

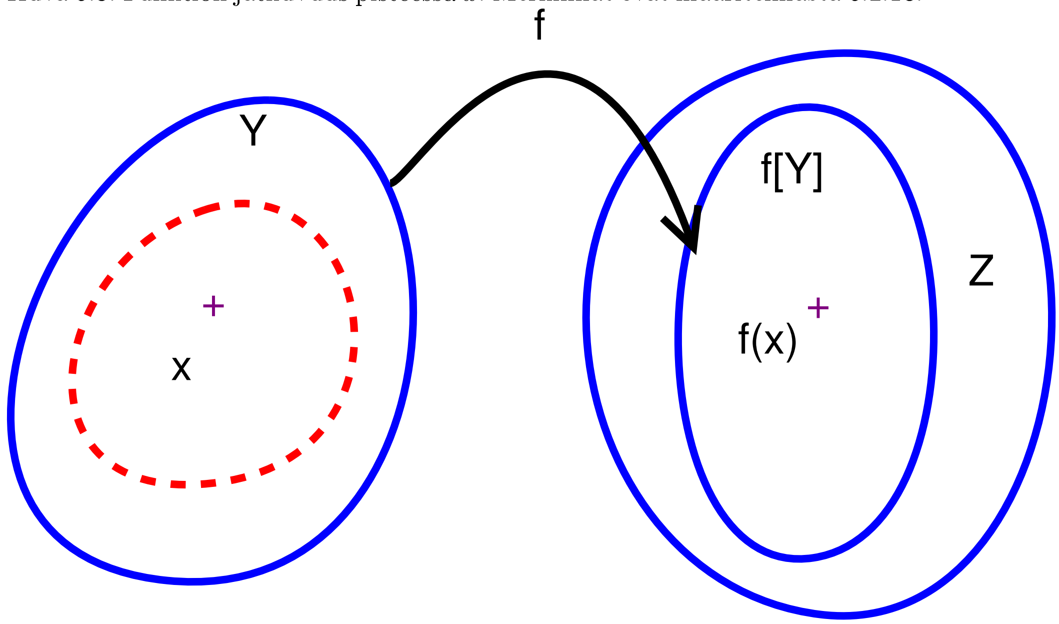
Määritelmä 5.2.22. Olkoon (T, τ) topologinen avaruus ja $A \subset T$. Olkoon

$$I := \{Y \subset T \mid T \setminus Y \in \tau \wedge A \subset Y\}.$$

Määritellään joukon A **sulkeuma** asettamalla

$$\operatorname{clos} A := \bigcap_{G \in I} G.$$

Kuva 5.3: Funktion jatkuvuus pisteessä x. Merkinnät ovat määritelmästä 5.2.18.



Joukon A **reuna** määritellään

$$\partial A := (\operatorname{clos} A) \cap (\operatorname{clos}(T \setminus A)).$$

Joukon A **sisäpuoli** määritellään

$$\operatorname{int} A := T \setminus \partial A.$$

Joukon A **ulkopuoli** määritellään

$$\operatorname{ext} A := T \setminus \operatorname{clos} A.$$

Määritelmä 5.2.23. Olkoon T topologinen avaruus. Sanomme, että T on **kytketty**, jos se ei ole kahden epätyhjän avoimen joukon unioni.

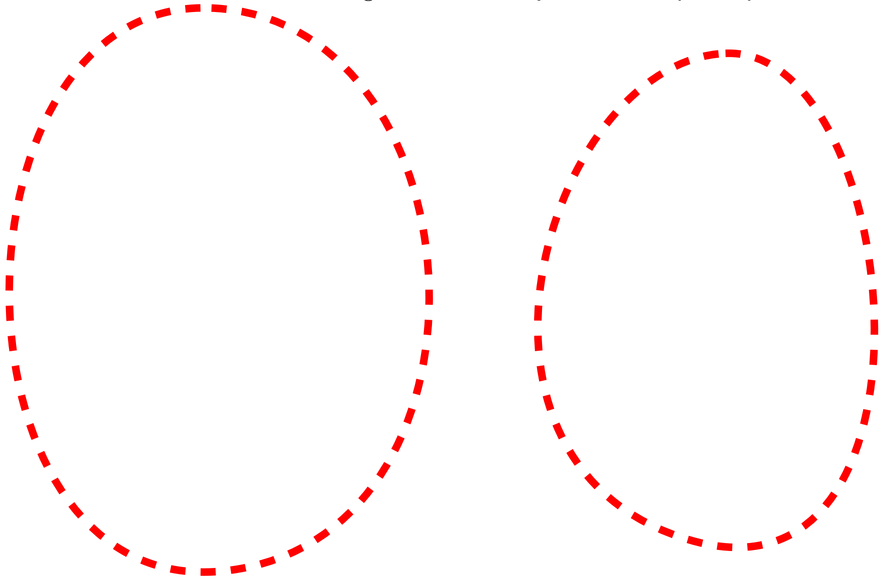
Kuva 5.2 esittää joukkoa, joka ei ole kytketty.

Määritelmä 5.2.24. Olkoon T topologinen avaruus. Sanomme, että T on **polkukytketty**, jos kaikille kaksille pisteille $x, y \in T$ on olemassa jatkuva funktio $p : [0, 1] \to T$, jolle $p(0) = x$ ja $p(1) = y$.

Huomautus 5.2.25. Polkukytketty avaruus on aina kytketty.

Määritelmä 5.2.26. Olkoon T topologinen avaruus ja $A, B \subset T$. Sanomme, että B on **tiheä** avaruudessa A, jos $B \subset A$ ja $A \subset \operatorname{clos} B$.

Kuva 5.4: Topologinen avaruus, joka ei ole kytketty.



Määritelmä 5.2.27. Olkoon T topologinen avaruus ja $E \subset T$. Sanomme, että E **ei ole missään tiheä**, jos $\operatorname{int}\operatorname{clos} E = \emptyset$.

Määritelmä 5.2.28. Olkoon T topologinen avaruus ja $A \subset T$. Sanomme, että A on **ensimmäistä kategoriaa avaruudessa** T, jos A on korkeintaan numeroituva unioni joukoista, jotka eivät ole missään tiheitä. Sanomme, että A on **toista kategoriaa avaruudessa** T, jos se ei ole ensimmäistä kategoriaa avaruudessa T.

Määritelmä 5.2.29. Olkoon T topologinen avaruus. Sanomme, että T on **separoituva**, jos on olemassa korkeintaan numeroituva ja tiheä (avaruudessa T) avaruuden T osajoukko.

Määritelmä 5.2.30. Olkoon (T, τ) topologinen avaruus ja $V \subset T$. Olkoon $\Gamma \subset 2^T$. Sanomme, että Γ on joukon V **peite**, jos

$$V \subset \bigcup_{G \in \Gamma} G.$$

Jos kaikki joukot $G \in \Gamma$ ovat avoimia, niin sanomme, että Γ on **avoin peite**. Jos $\Xi \subset \Gamma$ ja Ξ on joukon V peite, niin sanomme, että Ξ on peitteen Γ **alipeite** joukolle V.

Määritelmä 5.2.31. Olkoon (T, τ) topologinen avaruus ja $A \subset T$. Sanomme, että A on **kompakti**, jos jokaisella avoimella peitteellä joukolle A on äärellinen alipeite joukolle A. Jos T on kompakti, niin sanomme, että (T, τ) on **kompakti topologinen avaruus**.

Määritelmä 5.2.32. Olkoon (T, τ) Hausdorffin avaruus ja $A \subset T$. Sanomme, että A on **jonokompakti**, jos jokaisella jonolla joukossa A on suppeneva osajono, jonka raja-arvo on joukossa A.

Määritelmä 5.2.33. Olkoon (T, τ) topologinen avaruus. Sanomme, että (T, τ) on **lokaalikompakti avaruus**, jos jokaisella $x \in T$ on kompakti ympäristö.

Määritelmä 5.2.34. Olkoot (T, τ) ja (U, υ) topologisia avaruuksia. Sanomme, että funktio $f : T \to U$ on **homeomorfismi**, jos f on bijektio ja funktiot f ja f^{-1} ovat jatkuvia. Jos on olemassa homeomorfismi avaruudelta (T, τ) avaruudelle (U, υ), niin sanomme, että (T, τ) ja (U, υ) ovat **homeomorfiset**.

Huomautus 5.2.35. Homeomorfisten avaruuksien topologioita voidaan pitää samoina.

Määritelmä 5.2.36. Olkoot (T, τ) ja (U, υ) topologisia avaruuksia. Sanomme, että funktio $f : T \to U$ on **upotus**, jos f on homeomorfismi avaruudelta T avaruudelle $f[T]$.

Määritelmä 5.2.37. Olkoon T topologinen avaruus ja $f : T \to \mathbb{C}$ funktio. Määrittelemme funktion f **(topologisen) kantajan** asettamalla

$$\operatorname{supp} f := \operatorname{clos} \operatorname{supp}_{\mathrm{set}} f.$$

Jos funktion f kantaja on kompakti, niin sanomme, että f on **kompaktikantajainen**.

Määritelmä 5.2.38. Olkoon T topologinen avaruus. Sanomme, että T on **1. lajia laskettava**, jos jokaisella pisteellä $x \in T$ on korkeintaan numeroituva paikallinen ympäristökanta. Sanomme, että T on **2. lajia laskettava**, jos sen topologialla on korkeintaan numeroituva kanta.

Huomautus 5.2.39. 2. lajia laskettava topologinen avaruus on aina 1. lajia laskettava ja separoituva.

Lause 5.2.40. *Olkoon T 1. lajia laskettava topologinen avaruus ja U topologinen avaruus. Olkoon $f : T \to U$ funktio. Funktio f on jatkuva, jos ja vain jos jokaiselle jonolle $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subset T$ on voimassa*

$$x_k \to y \in T \implies f(x_k) \to f(y).$$

Vertaa lauseeseen 5.2.20.

Lause 5.2.41. *Olkoon T 1. lajia laskettava topologinen avaruus ja $A \subset T$. Tällöin A on suljettu, jos ja vain jos jokaiselle jonolle $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subset A$ on*

$$x_k \to a \in T \implies a \in A.$$

Vertaa lauseeseen 5.2.15.

Huomautus 5.2.42. Lauseet 5.2.40 ja 5.2.41 ovat erityisesti voimassa, jos T on metrinen avaruus, ks. luku 5.3.

Määritelmä 5.2.43. Olkoon T joukko. Kun $V, W \in T \times T$, niin merkitään $W^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y) \in W\}$ ja $V \circ W := \{(x,z) \mid \exists y \in T : (x,y) \in W \wedge (y,z) \in V\}$. Joukkoa $\Delta := \{(x,x) \mid x \in T\}$ sanotaan joukon $T \times T$ diagonaaliksi. Olkoon Z filtteri avaruudessa $T \times T$ siten, että

(i) $\forall W \in Z : \Delta \subset W$.

(ii) $W \in Z \implies W^{-1} \in Z$.

(iii) Jokaiselle $W \in Z$ on olemassa $V \in Z$ siten, että $V \circ V \in W$.

Sanomme, että filtteri Z (tai jokin sen kanta) määrittelee **tasaisen struktuurin** avaruudessa T. Jokaista $W \in Z$ kutsutaan tämän struktuurin **lähistöksi**.

Olkoon $Q := \{G \in 2^T \mid x \in G \implies \exists W \in Z : \{y \mid (x,y) \in W\} \subset G\}$. Olkoon $Y(W,x) := \{y \mid (x,y) \in W\}$, missä $W \in Z$ ja $x \in T$. Nyt Q määrittelee topologian τ joukossa T siten, että jokaiselle $x \in T$ joukko $\{Y(W,x) \mid W \in Z\}$ on pisteen x ympäristökanta. Nyt paria (T,τ) kutsutaan **tasaiseksi avaruudeksi**. Topologinen avaruus T on **tasoittuva**, jos sen topologia voidaan generoida yllä kuvatulla tavalla.

Määritelmä 5.2.44. Olkoon T tasainen avaruus ja I filtteri avaruudessa T. Sanomme, että I on **Cauchyn filtteri**, jos jokaiselle lähistölle V on olemassa $F \in I$ siten, että $F \times F \subset V$. Jos jokainen Cauchyn filtteri suppenee kohti jotakin pistettä $x \in T$, niin sanomme, että T on **täydellinen**.

Jokaiselle tasaiselle avaruudelle T voidaan konstruoida täydellinen tasainen avaruus $\tilde{T}$ siten, että T on isomorfinen joukon $\tilde{T}$ jonkin tiheän osajoukon kanssa, ja siten, että $\tilde{T}$ on separoituva, jos T on. Jos T on separoituva, niin $\tilde{T}$ on määritelty näiden ominaisuuksien nojalla isomorfisuuteen asti, ja sitä kutsutaan avaruuden T **täydellistymäksi**.

Määritelmä 5.2.45. Olkoon T epätyhjä joukko ja $(Y_\alpha)_{\alpha \in I}$ perhe topologisia avaruuksia. Olkoon f_α funktio avaruudelta T avaruuteen Y_α kullekin $\alpha \in I$. **Projektiivinen topologia** avaruudella T perheen $(Y_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ suhteen määritellään karkeimmaksi topologiaksi (avaruudella T), jossa jokainen f_α on jatkuva. **Induktiivinen topologia** avaruudella T perheen $(Y_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ suhteen määritellään hienoimmaksi topologiaksi (avaruudella T), jossa jokainen f_α on jatkuva.

Määritelmä 5.2.46. Olkoon $(Y_\alpha)_{\alpha \in I}$ perhe topologisia avaruuksia, T niiden karteesinen tulo ja f_α projektio avaruudelta T avaruudelle Y_α kullekin $\alpha \in I$. Projektiivista topologiaa avaruudella T perheen $(Y_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ suhteen kutsutaan **tulotopologiaksi** ja avaruutta T kutsutaan perheen $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ **(topologiseksi) tuloksi**.

Määritelmä 5.2.47. Olkoon $(G, \circ)$ ryhmä ja T topologia joukossa G. Sanomme, että $(G, \circ, T)$ on **topologinen ryhmä**, jos funktio $\circ : G \times G \to G$ on jatkuva. Avaruudessa $G \times G$ käytetään tulotopologiaa.

Määritelmä 5.2.48. Olkoon $(K, +, \cdot)$ kunta ja T topologia joukossa K. Sanomme, että $(K, +, \cdot, T)$ on **topologinen kunta**, jos funktiot $+ : K \times K \to K$ ja $\cdot : K \times K \to K$ ovat jatkuvia. Avaruudessa $K \times K$ käytetään tulotopologiaa.

Määritelmä 5.2.49. Olkoon (T, τ) topologinen avaruus. Sanomme, että τ on **diskreetti**, jos jokainen $A \subset T$ on avoin.

5.3 Metriset avaruudet

Metriset avaruudet ovat joukkoja, joissa on määritelty tietyt aksioomat toteuttava etäisyys pisteiden välillä.

Määritelmä 5.3.1. Olkoon E epätyhjä joukko ja $d : E \times E \to \mathbb{R}_0$ funktio. Sanomme, että d on **metriikka**, jos seuraavat aksioomat ovat voimassa:

(M1) $d(x, y) >= 0$ kaikille $x, y \in E$.

(M2) $d(x, x) = 0 \iff x = 0$ kaikille $x \in E$.

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ kaikille $x, y \in E$.

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ kaikille $x, y, z \in E$

Paria (E, d) kutsutaan **metriseksi avaruudeksi**. Aksioomaa (M4) kutsutaan **kolmioepäyhtälöksi**, ja sitä on havainnollistettu kuvassa 5.3.

Esimerkkejä:

1. Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on metrinen avaruus, kun määritellään $d(x, y) := |x - y|$ kaikille $x, y \in \mathbb{R}$.
2. Vastaavasti kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ on metrinen avaruus.
3. $\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$ ovat metrisiä avaruuksia, kun asetetaan

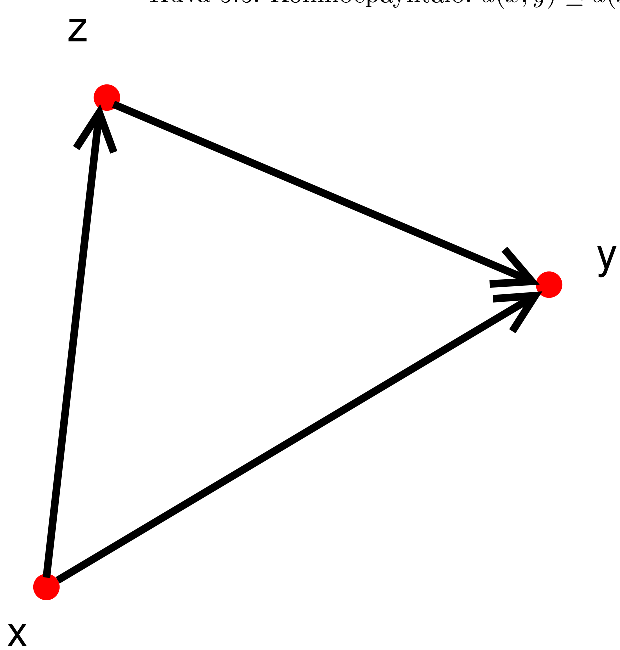
$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^2}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \text{ tai } \mathbb{C}.$$

4. Olkoon F kaikkien jatkuvien ja neliöllisesti integroituvien joukossa $\mathbb{R}^n$ määriteltyjen kompleksiarvoisten funktioiden joukko. F on metrinen avaruus, kun asetetaan

$$d(f, g) := \sqrt{\int_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|^2 d\mu}$$

missä $f, g \in F$.

Kuva 5.5: Kolmioepäyhtälö: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.



Määritelmä 5.3.2. Olkoon (E,d) metrinen avaruus. Määritellään **avoin pallo** pisteen $x \in E$ ympärillä asettamalla

$$B(E;x,r) := \{y \in E \mid d(x,y) < r\}$$

ja **suljettu pallo**

$$\bar{B}(E;x,r) := \{y \in E \mid d(x,y) \leq r\}.$$

Metrisen avaruuden (E,d) topologia τ määritellään topologiana, jonka kanta on

$$B := \{B(E;x,r) \mid x \in E, r \in \mathbb{R}_0\}. \tag{5.1}$$

Sanomme, että metriikka d ja topologia τ ovat **yhteensopivia** toistensa kanssa.

Lause 5.3.3. *Olkoon (E,d) metrinen avaruus. Kannan (5.1) määrittelemä topologia τ toteuttaa topologisen avaruuden aksioomat.*

Todistus.

(T1): $\emptyset = B(E;x,0)$ jollekin $x \in E$, joten $\emptyset \in \tau$. $E = \cup_{y \in E} B(E;y,1)$, joten $E \in \tau$.

(T2): Olkoon $(M_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \tau$, missä I on mielivaltainen joukko. Nyt

$$M_\alpha = \bigcup_{C \in B_\alpha} C,$$

missä $B_\alpha \subset B$ kaikilla $\alpha \in I$. Edelleen

$$\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} \bigcup_{C \in B_\alpha} C = \bigcup_{C \in V} C,$$

missä

$$V := \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha.$$

Täten $\cup_{\alpha \in I} M_\alpha \in \tau$.

(T3): Olkoot $M, N \in \tau$. Nyt

$$M = \bigcup_{C \in B_1} C$$

ja

$$N = \bigcup_{C \in B_2} C,$$

missä $B_1, B_2 \in B$. Jos $M = \emptyset$ tai $N = \emptyset$, niin (T3) on tosi. Voidaan olettaa, että $M \neq \emptyset$ ja $N \neq \emptyset$. Olkoon $x_0 \in M \cap N$. Nyt $x_0 \in P$ jollekin $P \in B_1$, ja $x_0 \in Q$ jollekin $Q \in B_2$. Meillä on $P = B(E; x_1, r_1)$ ja $Q = B(E; x_2, r_2)$. Olkoon $r_3 := \frac{1}{2}\min\{r_1, r_2\}$ ja $y \in B(E; x_0, r_3)$. Olkoot

$$\begin{aligned} d_1 &:= d(x_0, x_1) < r_1 \\ d_2 &:= d(x_0, x_2) < r_2. \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned} d(y, x_1) &\leq d(y, x_0) + d(x_0, x_1) \\ &< \frac{1}{2}(r_1 - d_1) + d_1 = \frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}d_1 \\ &< \frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_1 = r_1 \end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned} d(y, x_2) &\leq d(y, x_0) + d(x_0, x_2) \\ &< \frac{1}{2}(r_2 - d_2) + d_2 = \frac{1}{2}r_2 + \frac{1}{2}d_2 \\ &< \frac{1}{2}r_2 + \frac{1}{2}r_2 = r_2. \end{aligned}$$

Alkio $y \in B(E; x_0, r_3)$ oli mielivaltainen, joten

$$B(E; x_0, r_3) \subset P$$

ja

$$B(E; x_0, r_3) \subset Q,$$

mistä seuraa, että $B(E; x_0, r_3) \subset P \cap Q \subset M \cap N$. Siis jokaisella $x_0 \in M \cap N$ on olemassa $Y \in B$ siten, että $x_0 \in Y$ ja $Y \subset M \cap N$. Täten $M \cap N \in \tau$.

□

Kun (E,d) on metrinen avaruus, niin sen topologian generoi tasainen struktuuri, joka koostuu joukoista $W_\varepsilon := \{(x,y) \mid x,y \in E \wedge d(x,y) < \varepsilon\}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Kohdan (iii) määritelmässä 5.2.43 todistamiseksi asetetaan $V := W_{\varepsilon/2}$. Tällöin $(x,y) \in V$ ja $(y,z) \in V$. Olkoon $(x,z) \in V \circ V$. Nyt $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, joten $(x,z) \in W_\varepsilon$.

Määritelmä 5.3.4. Olkoon (T,τ) topologinen avaruus. Sanomme, että topologia τ on **metrisoituva**, jos on olemassa metriikka $d : A \times A \to \mathbb{R}_0$ siten, että d generoi topologian τ yllä olevien määritelmien mukaisesti.

Määritelmä 5.3.5. Olkoon (E,d) metrinen avaruus. Olkoon $\mathbf{a} := (a_k)_{k=0}^\infty \subset E$. Sanomme, että $\mathbf{a}$ on **Cauchyn jono**, jos

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n,m \in \mathbb{N} : n > N \wedge m > N \implies d(a_n, a_m) < \varepsilon.$$

Lause 5.3.6. *Olkoon (E,d) metrinen avaruus. Avaruus (E,d) on täydellinen, jos ja vain jos jokainen joukon E alkioiden Cauchyn jono suppenee kohti jotakin avaruuden E alkiota.*

Todistus harjoitustehtävänä.

Metrisen avaruuden (E,d) täydellistymä voidaan konstruoida sen Cauchyn jonojen muodostamista ekvivalenssiluokista seuraavasti [17]: Kun $\mathbf{x} := (x_k)$, $\mathbf{y} := (y_k) \subset E$, niin määritellään

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k)$$

Määritellään kaksi Cauchyn jonoa $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ekvivalenteiksi, jos ja vain jos $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$.

Määritelmä 5.3.7. Olkoot (E_1,d_1) ja (E_2,d_2) metrisiä avaruuksia ja $f : E_1 \to E_2$ funktio. Sanomme, että f on **isometria**, jos

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x,y)$$

kaikille $x, y \in E$.

Määritelmä 5.3.8. Olkoon (E,d) metrinen avaruus ja $A \subset E$. Sanomme, että A on **rajoitettu**, jos se kuuluu johonkin (äärellissäteiseen) palloon. Joukon A **halkaisija** on pienimmän joukon A sisältävän suljetun pallon halkaisija. Määritellään pisteen $f \in E$ **etäisyys** joukosta A kaavalla

$$\mathrm{dist}(f,A) := \inf_{g\in A} d(f,g).$$

Metrisessä avaruudessa funktion raja-arvon määritelmä saa muodon

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \iff$$
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : \forall x,y \in E_1 : d_1(x,y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon, \quad (5.2)$$

missä (E_1, d_1) ja (E_2, d_2) ovat metrisiä avaruuksia ja $f : E_1 \to E_2$ funktio, ja jonon raja-arvo saa muodon

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \iff$$
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists m \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : k \geq m \implies d(x_k, a) < \varepsilon, \tag{5.3}$$

missä (E, d) on metrinen avaruus ja $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subset E$.

Määritelmä 5.3.9. Olkoon E metrinen avaruus, $A \subset E$ ja Γ joukon A peite. Jos kaikkien joukkojen $G \in \Gamma$ halkaisija on pienempi kuin $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, niin sanomme, että Γ on joukon A **ε-peite**.

Määritelmä 5.3.10. Olkoon E metrinen avaruus ja $A \subset E$. Sanomme, että A on **totaalisesti rajoitettu**, jos jokaiselle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ on olemassa äärellinen joukko avoimia palloja, jotka muodostavat ε-peitteen joukolle A.

Lause 5.3.11. *Olkoon E metrinen avaruus. Avaruus E on kompakti, jos ja vain jos se on jonokompakti [28].*

Lause 5.3.12. *Tämä lause ja todistus pohjautuvat lauseeseen 5.2.8 kirjassa [5]. Ks. myös [16, 17].*

Olkoon E metrinen avaruus. Avaruus E on kompakti, jos ja vain jos se on täydellinen ja totaalisesti rajoitettu.

Todistus. Oletetaan ensin, että E on kompakti. Olkoon $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ja

$$P := \{B(E; x, \varepsilon) \mid x \in E\}.$$

Joukko P on peite avaruudelle E, joten joukolla P on äärellinen alipeite avaruudelle E. Siten E on totaalisesti rajoitettu.

Olkoon (x_i) Cauchyn jono avaruudessa E. Koska E on kompakti metrinen avaruus, niin se on jonokompakti, ja täten jonolla (x_i) on suppeneva osajono $(x_{n(k)})_{k=0}^{\infty} \subset E$. Olkoon

$$a = \lim_{k\to\infty} x_{n(k)}.$$

Olkoon $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. On olemassa $k_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_{n(k)}, a) < \varepsilon/2$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$. Koska (x_i) on Cauchyn jono, voidaan valita $i_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $i_0 > n_{n(k_0)}$ ja $d(x_i, x_j) < \varepsilon/2$ kaikilla $i, j \in \mathbb{N}$, $i, j \geq i_0$. Edelleen voidaan valita $k_1 \in \mathbb{N}$, jolle $n(k_1) > i_0$. Kun $i > i_0$, niin

$$d(x_i, a) \leq d(x_i, x_{n(k_1)}) + d(x_{n(k_1)}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Täten (x_i) suppenee avaruudessa E (raja-arvo a) ja E on täydellinen.

Oletetaan sitten, että E on täydellinen ja totaalisesti rajoitettu. Olkoon (x_n) ääretön jono avaruudessa E. Koska E on totaalisesti rajoitettu, on olemassa avaruuden E äärellinen 1-peite. Merkitään tätä $\Gamma := A(g_1, \frac{1}{2}), \ldots, A(g_N, \frac{1}{2})$. Ainakin yksi näistä palloista sisältää jonon (x_n) äärettömän osajonon, jota merkitään

$(x_{n,1})$. Otetaan seuraavaksi äärellinen $\frac{1}{2}$-peite avaruudelle E ja kuten aikaisemminkin muodostetaan jonon $(x_{n,1})$ ääretön osajono $(x_{n,2})$, joka sisältyy yhteen peitteen palloista. Jatkamme näin löytääksemme jokaiselle m jonon $(x_{n,m-1})$ äärettömän osajonon $(x_{n,m})$ siten, että $(x_{n,m})$ sisältyy palloon, jonka halkaisija on m^{-1}. Kun $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$, niin $x_{n,n}$ ja $x_{m,m}$ kuuluvat samaan palloon, jonka halkaisija on n^{-1}. Täten

$$d(x_{i,i}, x_{j,j}) \leq \frac{1}{\min\{i,j\}}$$

kaikille $i, j \in \mathbb{N}$. Siis $(x_{n,n})$ on Cauchyn jono ja koska E on täydellinen, jono $(x_{n,n})$ suppenee avaruudessa E, ja siten jonolla (x_n) on suppeneva osajono. Täten E on jonokompakti, mistä seuraa, että se on kompakti. □

Seurauslause 5.3.13. *Olkoon E täydellinen metrinen avaruus ja $A \subset E$. Joukko A on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja totaalisesti rajoitettu.*

Määritelmä 5.3.14. Olkoon K kunta, jossa on määritelty itseisarvo. Funktio $(\lambda, \mu) \mapsto |\lambda - \mu|$ on metriikka kunnassa K. Varustettuna tällä metriikalla kuntaa K kutsutaan **arvotetuksi kunnaksi**. Sanomme, että K on **ei-diskreetti**, jos sen topologia ei ole diskreetti.

Tehtäviä:

5.1 Olkoot T ja U topologisia avaruuksia ja $f : T \to U$ funktio. Osoita, että f on jatkuva, jos ja vain jos jokaisen avoimen joukon $R \subset U$ alkukuva $f^{-1}[U] \subset T$ on avoin.

5.2 Olkoot (E_1, d_1) ja (E_2, d_2) metrisiä avaruuksia ja $f : E_1 \to E_2$ funktio. Osoita, että raja-arvon määritelmät 5.2.17 ja (5.2) ovat tässä tapauksessa ekvivalentteja.

5.3 Olkoon (E, d) metrinen avaruus ja $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subset E$. Osoita, että raja-arvon määritelmät 5.2.16 ja (5.3) ovat tässä tapauksessa ekvivalentteja.

5.4 Olkoon E metrinen avaruus ja $B \subset E$. Osoita, että B on suljettu, jos ja vain jos jokaiselle jonolle $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subset B$ on

$$x_\alpha \to a \in E \implies a \in B.$$

5.5 Todista lause 5.3.6.

Luku 6

Topologiset vektoriavaruudet

Tässä luvussa on käytetty kirjaa [10].

6.1 Yleiset topologiset vektoriavaruudet

Määritelmä 6.1.1. Olkoon V vektoriavaruus ja τ topologia avaruudessa V. Sanomme, että topologia τ on **translaatioinvariantti**, jos funktio $x \in V \mapsto x + x_0$ on homeomorfismi jokaiselle $x_0 \in V$.

Määritelmä 6.1.2. Olkoon V vektoriavaruus ja d metriikka avaruudessa V. Sanomme, että d on **translaatioinvariantti**, jos $d(x, y) = d(x+a, y+a)$ kaikille $x, y, a \in V$.

Määritelmä 6.1.3. Olkoon V vektoriavaruus ei-diskreetillä topologisella kerroinkunnalla (K, U) (esim. $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$) ja olkoon τ topologia joukolle V. Sanomme, että $(V, +, \cdot, \tau)$ on **topologinen vektoriavaruus**, jos funktiot $+ : V \times V \to V$ ja $\cdot : K \times V \to V$ ovat jatkuvia. Avaruuksissa $V \times V$ ja $K \times V$ käytetään tulotopologioita.

Määritelmä 6.1.4. Olkoon V topologinen vektoriavaruus. Sanomme pisteen $0 \in V$ ympäristökantaa avaruuden V **0-ympäristökannaksi**.

Lause 6.1.5. *[10] Olkoon $(V, +, \cdot)$ vektoriavaruus ja τ siinä määritelty topologia. Avaruus $(V, +, \cdot, \tau)$ on topologinen vektoriavaruus, ts. operaatiot $+$ ja $\cdot$ ovat jatkuvia, jos ja vain jos τ on translaatioinvariantti ja sillä on 0-ympäristökanta B, joka toteuttaa seuraavat ehdot:*

(a) Jokaiselle $W \in B$ on olemassa $U \in B$ siten, että $U + U \subset W$.

(b) Jokainen $W \in B$ on radiaalinen ja rengastettu.

(c) On olemassa $\lambda \in K$, $0 < |\lambda| < 1$ siten, että ehdosta $W \in B$ seuraa $\lambda W \in B$.

Jos K on Arkhimedeen kunta, kuten esim. $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$, niin ehto (c) voidaan jättää pois.

Todistus. Tämä todistus on otettu kirjasta [10]. Osoitetaan ensin, että vaaditunlainen 0-ympäristökanta on olemassa. Olkoon $W \subset V$ 0-ympäristö. Operaation $\cdot$ jatkuvuuden nojalla on olemassa 0-ympäristö U ja reaaliluku $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ siten, että $\lambda U \subset W$ aina, kun $|\lambda| \leq \varepsilon$. Koska K on ei-diskreetti, $V := \cup\{\lambda U \mid |\lambda| \leq \varepsilon\}$ on rengastettu 0-ympäristö ja sisältyy joukkoon W. Olkoon B kaikkien rengastettujen 0-ympäristöjen joukko avaruudessa V. Nyt B on 0-ympäristökanta. Koska funktio $(\lambda, x_0) \mapsto \lambda x_0$ on jatkuva pisteessä $\lambda = 0$ jokaiselle $x_0 \in V$, niin jokainen $Z \in B$ on radiaalinen. Operaation $+$ jatkuvuuden nojalla B toteuttaa ehdon (a). Kohdan (c) todistamiseksi riittää huomata, että koska K on ei-diskreetti, niin on olemassa $\lambda \in K$ jolle $0 < \lambda < 1$ ja että 0-ympäristö λZ, $Z \in B$, on rengastettu. Lauseen [10, 1.1] nojalla τ on translaatioinvariantti.

Oletetaan sitten, että τ on translaatioinvariantti topologia avaruudessa V siten, että topologialla τ on 0-ympäristökanta B, joka toteuttaa ehdot (a), (b) ja (c). On osoitettava, että operaatiot $+$ ja $\cdot$ ovat jatkuvia. On selvää, että $\{x_0 + Z \mid Z \in B\}$ on ympäristökanta pisteessä $x_0 \in V$. Siten jos $Z \in B$ on annettu ja $U \in B$ valitaan niin, että $U + U \subset Z$, niin

$$x - x_0 \in U \wedge y - y_0 \in U \implies x + y \in x_0 + y_0 + Z.$$

Täten operaatio $+$ on jatkuva.

Olkoot $\lambda_0 \in K$ ja $x_0 \in V$ mielivaltaisia. Jos $Z \in B$ on annettu, niin kohdan (a) nojalla on olemassa $U \in B$ siten, että $U + U \subset Z$. Kohdan (b) nojalla U on radiaalinen, on olemassa reaaliluku $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ siten, että $(\lambda - \lambda_0)x_0 \in U$ aina, kun $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$. Oletetaan, että $\mu \in K$ toteuttaa ehdon (c). Tällöin on olemassa $n \in \mathbb{Z}$ siten, että $|\mu^{-n}| = |\mu|^{-n} \geq |\lambda_0| + \varepsilon$. Määritellään $W \in B$ asettamalla $W := \mu^n U$. Koska U on rengastettu, niin relaatioista $x - x_0 \in W$ ja $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$ seuraa, että $\lambda(x - x_0) \in U$. Täten

$$\lambda x = \lambda_0 x_0 + (\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda(x - x_0),$$

mistä seuraa, että $\lambda x \in \lambda_0 x_0 + U + U \subset \lambda_0 x_0 + Z$, mikä osoittaa, että operaatio $\cdot$ on jatkuva.

Oletetaan lopuksi, että K on Arkhimedeen kunta. Tällöin $|2| > 1$ alkiolle $2 \in K$, mistä seuraa, että $|2^n| = |2|^n > \lambda_0 + \varepsilon$ jollekin $n \in \mathbb{N}$ (merkinnät edellisestä kappaleesta). Kohdan (b) toistuvalla soveltamisella voidaan valita $W \in B$ siten, että $2^n W_1 \subset W_1 + \ldots + W_1 \subset U$, missä summalla on 2^n yhteenlaskettavaa. Koska W_1 ja siten $2^n W_1$ ovat rengastettuja, W_1 voidaan sijoittaa joukon W paikalle edellisen kappaleen todistuksessa (operaation $\cdot$ jatkuvuus), ja siten ehto (c) voidaan jättää pois tässä tapauksessa. □

Kun 0-ympäristökanta B on annettu, niin määritellään topologia τ avaruudessa V seuraavasti:

$$A \in \tau \iff \forall x \in A : \exists y \in V, Y \in B : x \in y + Y, \tag{6.1}$$

missä $y + Y := \{y + x \mid x \in Y\}$.

Määritelmä 6.1.6. Olkoot (V, τ) ja (W, υ) topologisia vektoriavaruuksia. Olkoon $f : V \to W$ funktio. Sanomme, että f on **topologinen isomorfismi**, jos f on algebrallinen isomorfismi vektoriavaruudelta V vektoriavaruudelle W ja homeomorfismi topologiselta avaruudelta (V, τ) topologiselle avaruudelle (W, υ). Jos on olemassa topologinen isomorfismi avaruudelta (V, τ) avaruudelle (W, υ), niin sanomme, että (V, τ) ja (W, υ) ovat **topologisesti isomorfiset**.

Määritelmä 6.1.7. Kun V ja W ovat topologisia vektoriavaruuksia, niin merkintä $V =_{\mathrm{tvs}} W$ tarkoittaa, että V ja W ovat samat topologisina vektoriavaruuksina, ts. V ja W ovat sama vektoriavaruus ja niiden topologiat ovat samat.

Määritelmä 6.1.8. Olkoon $(V, +, \cdot, \tau)$ topologinen vektoriavaruus. Määritellään vektoriavaruuden V **(topologinen) duaali** asettamalla

$$V^* := \{\tilde{f} \in V^\sharp \mid \tilde{f} \text{ on jatkuva}\}.$$

Määritelmä 6.1.9. [34] Olkoon V topologinen vektoriavaruus ja $F \subset V^\sharp$. Määritellään avaruuden V **heikko topologia** joukon F suhteen, merkitään $\sigma(V, F)$, siten, että se on karkein topologia, jossa kaikki joukon F funktionaalit ovat jatkuvia. Topologiaa $\sigma(V, V^*)$ sanotaan avaruuden V heikoksi topologiaksi.

Olkoon V topologinen vektoriavaruus, $F \subset V^\sharp$ ja $x_\alpha \in V$ verkko. Nyt $x_\alpha \to x$ topologiassa $\sigma(V, F)$, jos ja vain jos $a(x_\alpha) \to a(x)$ kaikilla $a \in F$.

Jos V on vektoriavaruus ja $x \in V$, niin vektori x voidaan samaistaa avaruuden V^{**} alkioon T_x asettamalla $T_x(\tilde{y}) = \tilde{y}(x)$ kaikille $\tilde{y} \in V^*$. Täten $V \subset V^{**}$.

Määritelmä 6.1.10. Olkoon V topologinen vektoriavaruus. Avaruuden V^* topologiaa $\sigma(V^*, V)$ sanotaan avaruuden V^* **heikko-*-topologiaksi**.

Olkoon V topologinen vektoriavaruus ja $\tilde{x}_\alpha \in V^*$ verkko. Nyt $\tilde{x}_\alpha \to \tilde{x}$ topologiassa $\sigma(V^*, V)$, jos ja vain jos $\tilde{x}_\alpha(y) \to \tilde{x}(y)$ kaikilla $y \in V$.

Jos V on topologinen vektoriavaruus kerroinkunnalla $K = \mathbb{R}$ tai $K = \mathbb{C}$ ja $F \subset V^\sharp$, niin $\sigma(V, F)$ on lokaalikonveksi topologia, jonka generoivat seminormit

$$\|x\|_{\tilde{f}} := |\tilde{f}(x)|, \quad x \in V,$$

kaikille $\tilde{f} \in F$. Erityisesti avaruuden V^* heikko-*-topologian generoivat seminormit

$$\|\tilde{g}\|_x := |\tilde{g}(x)|, \quad \tilde{g} \in V^*,$$

kaikille $x \in V$.

Määritelmä 6.1.11. Olkoon A vektoriavaruus ja τ topologia avaruudessa A. Sanomme, että (A, τ) on F-avaruus, jos se on täydellinen ja τ on translaatioinvariantti ja metrisoituva.

6.2 Lokaalikonveksit avaruudet

Tässä luvussa oletetaan, että kerroinkunta $K = \mathbb{R}$ tai $K = \mathbb{C}$.

Määritelmä 6.2.1. Olkoon V vektoriavaruus ja $A \subset V$ absorboiva. Määritellään joukon A **Minkowskin funktionaali**

$$\mu_A(x) := \inf\{t > 0 \mid t^{-1}x \in A\}.$$

Huomautus 6.2.2. Koska edellisessä määritelmässä A on absorboiva, niin $\mu_A(x) < \infty$ kaikille $x \in V$.

Määritelmä 6.2.3. Olkoon V vektoriavaruus kerroinkunnalla K. Sanomme, että funktio $\rho : V \to \mathbb{R}_0$ on **seminormi**, jos seuraavat aksioomat ovat voimassa:

(S1) $\rho(x) \geq 0$ kaikille $x \in V$.

(S2) $\rho(ax) = |a|\rho(x)$ kaikille $a \in K$, $x \in V$.

(S3) $\rho(x-y) \leq \rho(x-z) + \rho(z-y)$ kaikille $x, y, z \in V$.

Määritelmä 6.2.4. Olkoon P joukko seminormeja vektoriavaruudessa V. Sanomme, että P on **separoiva**, jos jokaiselle $x \in V \setminus \{0\}$ on olemassa $p \in P$ siten, että $p(x) \neq 0$.

Lause 6.2.5. *Olkoon V vektoriavaruus ja p seminormi avaruudessa V. Nyt $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$ kaikille $x, y \in V$.*

Todistus. Tämä todistus on otettu kirjasta [8]. Olkoon $x, y \in V$. Seminormien subadditiivisuudesta seuraa, että $p(x) = p(x-y+y) \leq p(x-y) + p(y)$, joten $p(x) - p(y) \leq p(x-y)$. Vastaavasti saadaan $p(y) - p(x) \leq p(y-x) = p(x-y)$. Täten $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$. □

Lause 6.2.6. *Olkoon V vektoriavaruus ja $A \subset V$ konveksi, absorboiva ja balansoitu. Nyt μ_A on seminormi.*

Todistus. Tämä todistus on otettu kirjasta [8]. Olkoon $x, y \in V$ ja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Olkoon $t := \mu_A(x) + \varepsilon$ ja $s := \mu_A(y) + \varepsilon$. Nyt $x/t \in A$ ja $y/s \in A$. Siten myös niiden konveksi kombinaatio

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{t}{s+t} \cdot \frac{x}{t} + \frac{s}{s+t} \cdot \frac{y}{s}$$

kuuluu joukkoon A. Täten $\mu_A(x+y) \leq s+t = \mu_A(x) + \mu_A(y) + 2\varepsilon$, mistä seuraa, että $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$. Minkowskin funktionaalin määritelmästä 6.2.1 seuraa, että $\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$ kaikille $x \in V$ ja $t \geq 0$. Olkoon $x \in V$ ja $s \in \mathbb{R}$. Meillä on

$$\mu_A(sx) = \inf\{t > 0 \mid t^{-1}sx \in A\}.$$

Oletetaan, että $s < 0$- Koska A on balansoitu, niin $t^{-1}sx = -t^{-1}|s|x \in A \iff t^{-1}|s|x \in A$, mistä seuraa, että $\mu_A(sx) = |s|\mu_A(x)$. □

Määritelmä 6.2.7. Olkoon V topologinen vektoriavaruus kerroinkunnalla K ja topologialla τ. Sanomme, että τ on **lokaalikonveksi topologia** jos topologialla τ on konveksi balansoitu 0-ympäristökanta. Jos lisäksi (V, τ) on Hausdorffin avaruus, niin sanomme, että V on **lokaalikonveksi avaruus**.

Lause 6.2.8. *Olkoon V topologinen vektoriavaruus topologialla τ. Olkoon P separoiva joukko seminormeja avaruudessa V. Olkoon*

$$V(p,n) := \left\{ x \in V \;\middle|\; p(x) < \frac{1}{n} \right\},$$

missä $p \in P$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$. Olkoon B joukko kaikista joukkojen $V(p,n)$ äärellisistä leikkauksista. Nyt V on lokaalikonveksi avaruus, jos ja vain jos B on topologian τ 0-ympäristökanta.

Todistus. Tässä todistuksessa on käytetty lauseiden [8, 1.36 ja 1.37] todistuksia. Oletetaan ensin, että V on lokaalikonveksi avaruus. Olkoon B avaruuden V konveksi ja balansoitu 0-ympäristökanta. Olkoon $A \in B$. Jos $x \in A$, niin $x/t \in A$ jollakin $t < 1$, koska A on avoin. Täten $\mu_A(x) < 1$. Jos $x \notin A$, niin väitteestä $x/t \in A$ seuraa $t \geq 1$, koska A on balansoitu. Täten $\mu_A(x) \geq 1$. Näin ollen

$$A = \{x \in V \mid \mu_A(x) < 1\}. \tag{6.2}$$

Lauseesta 6.2.6 seuraa, että μ_A on seminormi. Jos $r > 0$, niin yhtälöstä (6.2) ja lauseesta 6.2.5 seuraa, että

$$|\mu_A(x) - \mu_A(y)| \leq \mu_A(x - y) < r,$$

jos $x - y \in rA$. Täten μ_A on jatkuva. Jos $x \in V$ ja $x \neq 0$, niin $x \notin A_1$ jollekin $A_1 \in B$ ja $\mu_{A_1}(x) \geq 1$. Siis $\{\mu_A\}$ on separoiva.

Oletetaan sitten, että lauseen ehdot seminormijoukolle P ovat voimassa. Määritellään joukko $C \subset A$ avoimeksi, jos ja vain jos C on (mahdollisesti tyhjä) unioni kannan B alkioiden translaatioista. Tämä määrittelee translaatioinvariantin topologian τ avaruudessa A. Jokainen kannan B jäsen on konveksi ja balansoitu ja B on topologian τ 0-ympäristökanta.

Olkoon $x \in A$, $x \neq 0$. Nyt $p(x) > 0$ jollakin $p \in P$. Koska $x \notin V(p,n)$, jos $np(x) > 1$, niin 0 ei ole pisteen x ympäristössä $x - V(p,n)$, joten x ei kuulu joukon $\{0\}$ sulkeumaan. Siten $\{0\}$ on suljettu joukko, ja koska τ on translaatioinvariantti jokainen joukon A piste on suljettu.

Seuraavaksi näytetään, että yhteenlasku ja skalaarilla kertominen ovat jatkuvia. Olkoon U pisteen 0 ympäristö avaruudessa A. Nyt

$$V(p_1, n_1) \cap \ldots \cap V(p_m, n_m) \subset U$$

joillekin $p_1, \ldots, p_m \in P$ ja $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{Z}_+$. Asetetaan

$$V := V(p_1, 2n_1) \cap \ldots \cap V(p_m, 2n_m).$$

Koska jokainen $p \in P$ on subadditiivinen, niin $V + V \subset U$. Tämä osoittaa, että yhteenlasku on jatkuva. Oletetaan, että $x \in A$, $\alpha \in K$, ja U ja V ovat kuten määritelty yllä. Nyt $x \in sV$ jollekin $s > 0$. Olkoon

$$t := \frac{s}{1 + |\alpha| s}.$$

Jos $y \in x + tV$ ja $|\beta - \alpha| < 1/s$, niin

$$\beta y - \alpha x = \beta(y - x) + (\beta - \alpha)x$$

joka kuuluu joukkoon

$$|\beta| tV + |\beta - \alpha| sV \subset V + V \subset U,$$

koska $|\beta| t \leq 1$ ja V on balansoitu. Tämä osoittaa, että skalaarilla kertominen on jatkuva.

Siten A on lokaalikonveksi avaruus. Joukon $V(p, n)$ määritelmä osoittaa, että jokainen $p \in P$ on jatkuva pisteessä 0, mistä seuraa, että p on jatkuva avaruudessa A. $\square$

Huomautus 6.2.9. Ehto P on separoiva on yhtäpitävä sen kanssa, että τ on Hausdorffin topologia.

Olkoon V lokaalikonveksi avaruus seminormiperheellä $(\rho_\alpha)_{\alpha \in I}$, $(x_\gamma)_{\gamma \in G}$ verkko avaruudessa V ja $x \in V$. Olkoon $y_{\alpha,\gamma} := \rho_\alpha(x_\gamma - x)$ kaikille $\gamma \in G$ ja $\alpha \in I$. Tällöin $x_\gamma \to x$, jos ja vain jos verkko $(y_{\alpha,\gamma})_{\gamma \in G}$ suppenee kohti lukua 0 kaikille $\alpha \in I$.

Olkoon V lokaalikonveksi avaruus seminormiperheellä $(\rho_\alpha)_{\alpha \in I}$ ja W lokaalikonveksi avaruus seminormiperheellä $(\eta_\beta)_{\beta \in J}$. Olkoon $f : V \to W$ funktio. Lokaalikonvekseissa avaruuksissa funktion raja-arvo saadaan seuraavasti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a,$$

jos ja vain jos jokaiselle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ja jokaiselle äärelliselle joukolle seminormeja $\eta_{\beta(1)}, \ldots, \eta_{\beta(m)}$ on olemassa $\delta \in \mathbb{R}_+$ ja äärellinen joukko seminormeja $\rho_{\alpha(1)}, \ldots, \rho_{\alpha(n)}$ siten, että

$$\begin{aligned} &\rho_{\alpha(1)}(x - x_0) < \delta \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \rho_{\alpha(n)}(x - x_0) < \delta \\ &\quad \Longrightarrow \ \eta_{\beta(1)}(f(x) - a) < \varepsilon \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \eta_{\beta(m)}(f(x) - a) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Määritelmä 6.2.10. Olkoon V lokaalikonveksi avaruus. Duaaliavaruuden V^* **vahva topologia** määritellään seminormien

$$\|f\|_B := \sup_{x \in B} |f(x)|, \quad f \in V^*, B \in S,$$

generoimana topologiana, missä

$$S := \{\text{kaikki avaruuden } V \text{ rajoitetut joukot}\}.$$

Avaruutta V^* varustettuna tällä topologialla kutsutaan avaruuden V **vahvaksi duaaliavaruudeksi** [29].

6.3 Normiavaruudet

Määritelmä 6.3.1. Olkoon V vektoriavaruus kerroinkunnalla $K = \mathbb{R}$ tai $K = \mathbb{C}$. Olkoon $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0$ funktio. Sanomme, että $\|\cdot\|$ on **normi** ja V **normiavaruus**, jos seuraavat aksioomat ovat voimassa:

(N1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ kaikille $x \in V$.

(N2) $\|ax\| = |a|\|x\|$ kaikille $a \in K$, $x \in V$.

(N3) $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$ kaikille $x, y, z \in V$.

Aksiooma (N3) on yksi muoto kolmioepäyhtälöstä. Jo normiavaruus on täydellinen, niin sitä kutsutaan **Banachin avaruudeksi**.

Esimerkkejä:

1. Jatkuvien ja rajoitettujen funktioiden $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ muodostama avaruus $C_b(\mathbb{R}^n)$ varustettuna normilla
$$\|f\| := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|, \quad f \in C_b(\mathbb{R}^n),$$
on Banachin avaruus. Ks. luku 9.3.

2. Vektoriavaruus $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ varustettuna normille $\|x\| := |x|$, $x \in \mathbb{R}$, on Banachin avaruus.

3. Vektoriavaruus $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, +, \cdot)$ varustettuna normille $\|x\| := |x|$, $x \in \mathbb{C}$, on Banachin avaruus.

4. Vektoriavaruus $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, varustettuna normilla
$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$
on Banachin avaruus.

5. Vektoriavaruus $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, varustettuna normilla
$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n,$$
on Banachin avaruus.

Jokainen normiavaruus V on metrinen avaruus, kun metriikka määritellään
$$d(x, y) := \|x - y\|, \quad x, y \in V.$$

Määritelmä 6.3.2. Olkoon V vektoriavaruus ja $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ kaksi avaruudessa V määriteltyä normia. Sanomme, että normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat **ekvivalentit**, jos on olemassa luvut $a, b \in \mathbb{R}_+$ siten, että

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$$

kaikille $x \in V$.

Lause 6.3.3. *Olkoon V vektoriavaruus ja $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ kaksi avaruudessa V määriteltyä normia. Normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ generoivat saman topologian, jos ja vain jos ne ovat ekvivalentit.*

Todistus. Olkoot τ_1 ja τ_2 normien $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ generoimat topologiat ja avaruudet V_1 ja V_2 normiavaruuksia V varustettuna kullakin topologialla.

Oletetaan ensin, että $\tau_1 = \tau_2$. Oletetaan, että olisi $\neg\exists a \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in V : a\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ (vastaoletus 1). Jokaisella $k \in \mathbb{N}$ on olemassa $x_k \in V$ siten, että $\|x_k\|_1 = 1/(k+1)$ ja $\|x_k\|_2 \geq (k+1)\|x_k\|_1 = 1$. Nyt $x_k \to 0$ topologiassa T_1, mutta $x_k \not\to 0$ topologiassa T_2. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus 1 on väärä.

Oletetaan, että olisi $\neg\exists b \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in V : \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$ (vastaoletus 2). Jokaisella $k \in \mathbb{N}$ on olemassa $x_k \in V$ siten, että $\|x_k\|_2 = 1/(k+1)$ ja $\|x_k\|_1 \geq (k+1)\|x_k\|_2 = 1$. Nyt $x_k \to 0$ topologiassa τ_2, mutta $x_k \not\to 0$ topologiassa τ_1. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus 2 on väärä.

Oletetaan sitten, että kaikille $x \in V$ on $a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$, missä $a, b \in \mathbb{R}_+$ ovat vakioita. Olkoon $A \in \tau_1$ ja $x \in A$. Nyt $B(V_1; x, r_1) \subset A$ jollakin $r_1 \in \mathbb{R}_+$. Olkoon $y \in B(V_2; x, ar_1)$. Nyt $\|y - x\|_2 < ar_1$ ja $\|y - x\|_1 \leq \frac{1}{a}\|y - x\|_2 < r_1$. Siis $B(V_2; x, ar_1) \subset B(V_1; x, r_1) \subset A$. Koska $x \in A$ oli mielivaltainen, niin lauseen 5.2.10 nojalla $A \in \tau_2$.

Oletetaan edelleen, että normit ovat ekvivalentteja. Olkoon $A \in \tau_2$ ja $x \in A$. Nyt $B(V_2; x, r_2) \subset A$ jollakin $r_2 \in \mathbb{R}_+$. Olkoon $y \in B(V_1; x, r_2/b)$. Nyt $\|y - x\|_1 < r_2/b$ ja $\|y - x\|_2 \leq b\|y - x\|_1 < r_2$. Siis $B(V_1; x, r_2/b) \subset B(V_2; x, r_2) \subset A$. Koska $x \in A$ oli mielivaltainen, niin lauseen 5.2.10 nojalla $A \in \tau_1$. □

Normiavaruuksille rajoitetun joukon määritelmä voidaan kirjoittaa seuraavaan muotoon:

Määritelmä 6.3.4. Kun V on normiavaruus ja $A \subset V$, $A \neq \emptyset$, niin sanomme, että A on **rajoitettu**, jos on olemassa luku $M \in \mathbb{R}_+$ siten, että $\|x\| \leq M$ kaikille $x \in A$.

Määritelmä 6.3.5. Olkoon X epätyhjä joukko, V normiavaruus ja $f : X \to V$ funktio. Sanomme, että f on **rajoitettu**, jos on olemassa luku $m \in \mathbb{R}$ siten, että $\|f(x)\| \leq m$ kaikilla $x \in X$.

Lause 6.3.6. *Olkoot $(V, \|\cdot\|_V)$ ja $(W, \|\cdot\|_W)$ normiavaruuksia ja $f : V \to W$ lineaarinen funktio. Tällöin f on jatkuva, jos ja vain jos se on rajoitettu.*

Todistus. Oletetaan ensin, että f on rajoitettu. Nyt $\|f(x)\|_W \leq m\|x\|_V$ kaikille $x \in V$, missä $m \in \mathbb{R}_+$ on vakio. Oletetaan, että $(x_k) \subset V$ ja $x_k \to y \in V$, kun $k \to \infty$. Nyt $\|f(x_k) - f(y)\|_W = \|f(x_k - y)\|_W \leq m\|x_k - y\|_V \to 0$, kun $k \to \infty$. Siten lauseen 5.2.40 nojalla f on jatkuva.

Oletetaan sitten, että f on jatkuva. Oletetaan, että f ei olisi rajoitettu (vastaoletus). Koska f ei ole rajoitettu, niin jokaisella $r \in \mathbb{R}_+$ on olemassa $x \in V$ siten, että $\|x\|_V = 1$ ja $\|f(x)\|_W > r$. Kun $k \in \mathbb{N}$, niin valitaan x_k siten, että $\|x_k\|_V = 1$ ja $\|f(x_k)\|_W > k+1$. Nyt

$$\left\| \frac{x_k}{k+1} \right\|_V = \frac{1}{k+1} \to 0,$$

kun $k \to 0$, mutta

$$\left\| f\left(\frac{x_k}{k+1} \right) \right\|_W = \frac{1}{k+1} \|f(x_k)\|_W > \frac{1}{k+1} \cdot (k+1) = 1.$$

Siis

$$f\left(\frac{x_k}{k+1} \right) \not\to 0 = f(0),$$

mikä on ristiriidassa lauseen 5.2.40 kanssa, joten vastaoletus on väärä ja f on rajoitettu. □

Lause 6.3.7. *[5, lause 5.2.4] Olkoon V Banachin avaruus ja $A \subset V$.*

(i) Jos A on kompakti, niin se on suljettu ja rajoitettu.

(ii) Jos A on suljettu ja rajoitettu ja V on äärellisulotteinen, niin A on kompakti.

Määritelmä 6.3.8. Olkoot V ja W normiavaruuksia. Sanomme, että funktio $\iota : V \twoheadrightarrow W$ on **isometrinen isomorfismi**, jos se on algebrallinen isomorfismi vektoriavaruudelta V vektoriavaruudelle W ja lisäksi isometria metriseltä avaruudelta V metriselle avaruudelle W. Jos on olemassa isometrinen isomorfismi normiavaruudelta V normiavaruudelle W, niin sanomme, että V ja W ovat **isometrisesti isomorfiset**.

Huomautus 6.3.9. Isometrisesti isomorfiset normiavaruudet voidaan samaistaa keskenään.

Määritelmä 6.3.10. Olkoot V ja W Banachin avaruuksia. Jos V on isometrisesti isomorfinen jonkin avaruuden W osajoukon kanssa, niin sanomme, että V on **isometrisesti upotettu** avaruuteen W ja merkitsemme tätä $V \subset_1 W$.

Määritelmä 6.3.11. Olkoon V Banachin avaruus kerroinkunnalla K ja $(e_k)_{k=0}^{\infty} \subset V$. Sanomme, että (e_k) on avaruuden V **Schauderin kanta**, jos (e_k) on lineaarisesti riippumaton ja kaikille $f \in V$ on olemassa skalaarit $a_k \in K$, $k \in \mathbb{N}$, siten, että

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e_k. \tag{6.3}$$

Jos sarja (6.3) suppenee riippumatta termien järjestyksestä, ts.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k e_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} e_{\sigma(k)}$$

kaikille bijektioille $\sigma : \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{N}$ ja kaikille $f \in V$, niin sanomme, että (e_k) on **ehdoton kanta**. Muussa tapauksessa sanomme, että (e_k) on **ehdollinen kanta**.

Määritelmä 6.3.12. Olkoon $p \in [1, \infty]$. Kun $p < \infty$, määritellään Banachin avaruus

$$l^p := \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \|\mathbf{a}\| := \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{a}[k]|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Kun $p = \infty$, määritellään Banachin avaruus

$$l^\infty := \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \|\mathbf{a}\| := \sup_{k \in \mathbb{N}} |\mathbf{a}[k]| < \infty \right\}.$$

Määritelmä 6.3.13. Määritellään Banachin avaruus c_0 seuraavasti:

$$c_0 := \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \lim_{k \to \infty} \mathbf{a}[k] = 0 \right\}$$

ja

$$\|\mathbf{a} \mid c_0\| := \sup_{k \in \mathbb{N}} |\mathbf{a}[k]|.$$

6.4 Sisätuloavaruudet

Määritelmä 6.4.1. Olkoon V vektoriavaruus kerroinkunnalla $K = \mathbb{R}$ tai $K = \mathbb{C}$. Olkoon $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$ funktio. Sanomme, että $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on **sisätulo** ja V **sisätuloavaruus**, jos seuraavat aksioomat ovat voimassa:

(ST1) $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_0$ kaikille $x \in V$.

(ST2) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ kaikille $x \in V$.

(ST3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$ kaikille $x, y \in V$.

(ST4) $\langle x, ay \rangle = a\langle x, y \rangle$ kaikille $x, y \in V, a \in K$.

(ST5) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ kaikille $x, y, z \in V$.

Täydellistä sisätuloavaruutta kutsutaan **Hilbertin avaruudeksi**.

Esimerkkejä:

1. Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ varustettuna sisätulolla $\langle x, y \rangle := xy$, $x, y \in \mathbb{R}$, on Hilbertin avaruus.

2. Kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ varustettuna sisätulolla $\langle x, y\rangle := x^* y$, $x, y \in \mathbb{C}$, on Hilbertin avaruus.

3. $\mathbb{R}^n$ varustettuna sisätulolla
$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$
on Hilbertin avaruus.

4. $\mathbb{C}^n$ varustettuna sisätulolla
$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k^* y_k, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$
on Hilbertin avaruus.

5. $L^p(\mathbb{R}^n)$ koostuu Borel-mitallisten funktioiden $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ määräämistä ekvivalenssiluokista: funktiot, jotka eroavat vain 0-mitallisessa joukossa, samaistetaan. Ks. luvut 9.2 ja 8. Avaruudessa $L^2(\mathbb{R}^n)$ sisätulo määritellään
$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})^* g(\mathbf{x}) d\mu$$
missä $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Avaruus $L^2(\mathbb{R}^n)$ on Hilbertin avaruus.

Kun S on sisätuloavaruus, määritellään
$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad x \in S. \tag{6.4}$$
Myöhemmin osoitetaan, että tämä on normi avaruudessa S.

Lause 6.4.2. ***Schwartzin epäyhtälö.*** *[5, lause 1.5.5]*
Olkoon V sisätuloavaruus ja $f, g \in V$. Tällöin $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\|$.

Todistus. [5, lause 1.5.5] Jos $g = 0$, niin väite on tosi. Oletetaan jatkossa, että $g \neq 0$. Riittää osoittaa, että
$$|\langle f, \frac{g}{\|g\|}\rangle| \leq \|f\|$$
kaikille $g \neq 0$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $|\langle f, h\rangle| \leq \|f\|$ kaikille yksikkövektoreille h. Nyt
$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f - \langle f, h\rangle h\|^2 = \langle f - \langle f, h\rangle h, f - \langle f, h\rangle h\rangle \\ &= \langle f, f\rangle - \langle f, h\rangle\langle f, h\rangle - \langle f, h\rangle\langle h, f\rangle + \langle f, h\rangle^2\langle h, h\rangle \\ &= \langle f, f\rangle - \langle f, h\rangle\langle h, f\rangle \\ &= \|f\|^2 - |\langle f, h\rangle|^2. \end{aligned}$$
□

Lause 6.4.3. *Kaava* (6.4) *määrittelee normin avaruudessa V.*

Todistus. [5, lause 1.5.6] Kolmioepäyhtälöä lukuunottamatta normin aksioomat ovat ilmiselviä. Kolmioepäyhtälö todistetaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle \\ &= \|f\|^2 + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \|g\|^2 \\ &\le \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2.\end{aligned}$$

□

On olemassa myös normiavaruuksia, jotka eivät ole sisätuloavaruuksia.

Määritelmä 6.4.4. [5, määritelmä 1.5.7] Olkoon V sisätuloavaruus ja $A \subset V$. Määritellään

$$x \perp y \iff \langle x,y\rangle = 0, \quad x,y \in V.$$

Jos $x \perp y$, niin sanomme, että x ja y ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Sanomme, että A on **ortogonaalinen**, jos $x \perp y$ kaikille $x,y \in A$, $x \neq y$. Jos lisäksi $\langle x,x\rangle = 1$ kaikille $x \in A$, niin sanomme, että A on **ortonormaali**. Määritellään joukon A **ortogonaalinen komplementti** asettamalla

$$A^\perp := \{x \in V \mid \forall y \in A : x \perp y\}.$$

Siis joukon ortogonaalinen komplementti koostuu niistä vektoreista, jotka ovat kohtisuorassa kaikkia joukon vektoreita vastaan.

Lause 6.4.5. *[5, lause 1.5.11] Olkoon V Hilbertin avaruus, M sen suljettu aliavaruus ja $f \in V$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen avaruuden M piste lähimpänä pistettä f.*

Todistus. [5, lause 1.5.11] Olkoon $d := \operatorname{dist}(f, M)$ ja muodostetaan jono $(g_n) \subset M$ siten, että $\lim \|f - g_n\| = d$. Suunnikassäännöstä

$$2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 = \|a-b\|^2 + \|a+b\|^2$$

seuraa, että

$$\begin{aligned}\|g_n - g_m\|^2 &= \|(g_n - f) - (g_m - f)\|^2 \\ &= 2\|g_n - f\|^2 + 2\|g_m - f\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(g_n + g_m) - f\right\|^2.\end{aligned}$$

Koska $(g_n + g_m)/2 \in M$, niin viimeisen termin itseisarvo ei ole vähemmän kuin $4d^2$. Siten

$$\lim_{m,n\to\infty} \|g_n - g_m\| \le 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0,$$

joten (g_n) on Cauchyn jono. Koska M on suljettu, niin $g_n \to g$ jollekin $g \in M$. Koska $\lim \|f - g_n\| = d$, niin $\|f - g\| = d$.

Oletetaan, että olisi toinen alkio $g' \in M$ siten, että $\|f - g'\| = d$. Suunnikassäännöstä seuraa, että

$$\left\| f - \frac{1}{2}(g + g') \right\|^2 = d^2 - \|g - g'\|^2.$$

Koska $(g + g')/2 \in M$, niin tämän yhtälön vasen puoli ei ole vähemmän kuin d^2. Siten $g = g'$. □

Lause 6.4.6. *[5, lause 1.5.12] Olkoon V Hilbertin avaruus ja M sen suljettu aliavaruus. Tällöin $M^\perp$ on myös avaruuden H suljettu aliavaruus, $M \cap M^\perp = \{0\}$ ja*

$$V = M \oplus M^\perp.$$

Edelleen kehitelmässä $f = g + h$, $g \in M$, $h \in M^\perp$, on g joukon M alkio, joka on lähimpänä alkiota f.

Todistus. [5, lause 1.5.12] Olkoon $(x_k) \subset M^\perp$ ja $x_k \to y \in H$. Olkoon $m \in M$ mielivaltainen. Nyt $\langle m, x_k \rangle = 0$ kaikille $k \in \mathbb{N}$. Toisaalta $\langle m, x_k \rangle \to \langle m, y \rangle$, joten $\langle m, y \rangle = 0$. Koska $m \in M$ oli mielivaltainen, niin $y \in M^\perp$. Olkoon $z \in M \cap M^\perp$. Koska $z \in M^\perp$, niin z on kohtisuorassa kaikkia avaruuden M vektoreita vastaan, erityisesti vektoria $z \in M$. Siis $\langle z, z \rangle = 0$, joten $z = 0$. Täten $M^\perp$ on suljettu ja $M \cap M^\perp = \{0\}$.

Riittää osoittaa, että $V = M + M^\perp$. Jos $f \in M$, niin tulos on ilmiselvä. Oletetaan, että $f \notin M$. Olkoon $g \in M$ avaruuden M lähinnä alkiota f oleva piste. Tällainen piste on olemassa lauseen 6.4.5 nojalla. Nyt on osoitettava, että $f - g \in M^\perp$. Mille tahansa $h \in M$ ja $\alpha > 0$, on $g + \alpha h \in M$, ja siten

$$\|f - g\|^2 \leq \|f - g - \alpha h\|^2 = \|f - g\|^2 - 2 \operatorname{Re} \alpha \langle h, f - g \rangle + \alpha^2 \|h\|^2.$$

Tästä seuraa, että $2 \operatorname{Re} \alpha \langle h, f - g \rangle \leq \alpha^2 \|h\|^2$ ja edelleen $2 \operatorname{Re} \langle h, f - g \rangle \leq \alpha \|h\|^2$. Koska $\alpha > 0$ oli mielivaltainen, niin $\operatorname{Re} \langle h, f - g \rangle \leq 0$. Toistamalla sama päättely kun $\alpha < 0$ saadaan $\operatorname{Re} \langle h, f - g \rangle \geq 0$. Siten $\operatorname{Re} \langle h, f - g \rangle = 0$ ja samoin $\operatorname{Im} \langle h, f - g \rangle = 0$. Siten $\langle h, f - g \rangle = 0$ kaikille $h \in M$, joten $f - g \in M^\perp$. □

Lause 6.4.7. *[5, lemma 1.5.15] Olkoon V Hilbertin avaruus. Olkoon $(\varphi_n) \subset H$ ortonormaali vektorijoukko ja $(\alpha_n) \subset \mathbb{C}$. Tällöin $\sum \alpha_n \varphi_n$ suppenee, jos ja vain jos $\sum |\alpha_n|^2$ suppenee. Jos sarja suppenee, niin sen summa on riippumaton termien järjestyksestä ja*

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \right\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2}. \tag{6.5}$$

Todistus. Koska (φ_n) on ortonormaali, niin

$$\left\| \sum_{n=i}^{j} \alpha_n \varphi_n \right\| = \sqrt{\sum_{n=i}^{j} |\alpha_n|^2}. \tag{6.6}$$

Siis jos $\sum |\alpha_n|^2$ suppenee, niin jono $(\sum_{n=0}^m \alpha_n \varphi_n)_{m=0}^\infty$ on Cauchyn jono, ja koska V on täydellinen, jono suppenee. Asettamalla $i = 0$ ja antamalla $j \to \infty$ kaavassa (6.6) saadaan kaava (6.5).

Olkoon $f := \sum \alpha_{m_n} \varphi_{m_n}$ sarjan $g := \sum \alpha_n \varphi_n$ uudelleenjärjestely. Nyt

$$\|f\|^2 = \|g\|^2 = \sum |\alpha_n|^2 \tag{6.7}$$

$$\|f - g\|^2 = \|f\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle f, g\rangle + \|g\|^2 \tag{6.8}$$

Toisaalta

$$\langle f, g\rangle = \lim_{j\to\infty} \left\langle \sum \alpha_{m_n} \varphi_{m_n}, \sum \alpha_n \varphi_n \right\rangle = \sum |\alpha_n|^2.$$

Siten kaavojen (6.7) ja (6.8) nojalla $\|f - g\| = 0$. □

Määritelmä 6.4.8. Olkoon V Hilbertin avaruus ja $L = (\varphi_n)$ ortonormaali joukko. Sanomme, että L on Hilbertin avaruuden V **ortonormaali kanta**, jos jokaiselle $f \in V$ on

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi_n, f\rangle \varphi_n. \tag{6.9}$$

Huomautus 6.4.9. Ortonormaali kanta ei yleisesti ole Hamelin kanta.

Lause 6.4.10. *[5, lause 1.5.18] Olkoon V separoituva Hilbertin avaruus ja olkoon $L = (\varphi_n)$ ortonormaali joukko avaruudessa V. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(i) $L^\perp = \{0\}$,

(ii) $\operatorname{clos\,span} L = V$,

(iii) V on ortonormaali kanta ja

(iv) (Parsevalin kaava) Jokaiselle $f \in V$ on

$$\|f\|^2 = \sum |\langle \varphi_n, f\rangle|^2.$$

Todistus. (i) $\implies$ (ii). Jos $\operatorname{clos\,span} L \neq V$, niin on olemassa piste $f \in V$, $f \notin \operatorname{clos\,span} L$. Siten $f = g + h$ joillekin $g \in \operatorname{clos\,span} L$ ja $h \in (\operatorname{clos\,span} L)^\perp$, $h \neq 0$. Tästä seuraa, että $L^\perp = (\operatorname{clos\,span} L)^\perp \neq \{0\}$, mikä on ristiriidassa ehdon (i) kanssa.

(ii) $\implies$ (iii). Sarja $\sum \langle \varphi_n, f\rangle$ suppenee kohti funktion f ortogonaalista projektiota avaruudelle $\operatorname{clos\,span} L = V$.

(iii) $\implies$ (iv). Tämä seuraa yhtälöstä

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi_n, f\rangle \varphi_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=0}^{\infty} |\langle \varphi_n, f\rangle|^2.$$

(iv) $\implies$ (i). Jos $f \in L^\perp$, niin jokainen termi summassa (6.9) on 0, mistä seuraa, että $f = 0$. □

Huomautus 6.4.11. Jokaisella separoituvalla Hilbertin avaruudella on ortonormaali kanta.

Määritelmä 6.4.12. [27] Olkoon V Hilbertin avaruus ja $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subset V$. Sanomme, että $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ on **Rieszin jono**, jos on olemassa vakiot $c, d \in \mathbb{R}_+$ siten, että

$$c \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \right\|^2 \leq d \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2$$

kaikille jonoille $(a_k)_{k=0}^{\infty} \in l^2$. Jos $\operatorname{clos} \operatorname{span}\{x_k\} = V$, niin sanomme, että $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ on avaruuden V **Rieszin kanta**.

Määritelmä 6.4.13. Olkoon V sisätuloavaruus ja $A : V \to V$ lineaarinen funktio. Määritellään funktion A **transpoosi** yhtälöllä

$$\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle^*$$

kaikille $x, y \in V$ ja funktion A **Hermiten konjugaatti** yhtälöllä

$$\langle x, Ay \rangle = \langle A^\dagger x, y \rangle$$

kaikille $x, y \in V$.

Vertaa vastaavaan määritelmään matriiseille, määritelmä 4.1.10. Kuin matriisit tulkitaan lineaarisiksi kuvauksiksi ja pystyvektorien välinen sisätulo määritellään

$$\langle x, y \rangle := x^\dagger y, \quad x, y \in \mathbb{C}^{Z(n) \times Z(1)},$$

niin molemmat määritelmät ovat ekvivalentteja (harjoitustehtävä).

Määritelmä 6.4.14. . Olkoon V vektoriavaruus ja $f : V \to V$ lineaarinen funktio. Sanomme, että

- f on **symmetrinen**, jos $f = f^T$.
- f on **hermiittinen**, jos $f = f^\dagger$.
- f on **ortogonaalinen**, jos $f^{-1} = f^T$.
- f on **unitaarinen**, jos $f^{-1} = f^\dagger$.

Vertaa vastaavaan määritelmään matriiseille, määritelmä 4.1.11.

6.5 Topologisiin vektoriavaruuksiin liittyviä lauseita

Määritelmä 6.5.1. Olkoon V vektoriavaruus kerroinkunnalla $\mathbb{C}$. Olkoon f funktio avaruudelta V joukkoon $\mathbb{C}$ siten, että $f(z + w) = f(z) + f(w)$ kaikille $z, w \in V$. Sanomme, että f on **reaalilineaarinen**, jos $f(\alpha z) = \alpha f(z)$ kaikille $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $z \in V$. Sanomme, että f on **kompleksilineaarinen**, jos $f(\alpha z) = \alpha f(z)$ kaikille $\alpha \in \mathbb{C}$ ja $z \in V$.

Nimitystä "Hahn-Banachin lause" käytetään useammalle eri lauseelle, mukaanlukien tässä esitetyt seuraavat kolme lausetta.

Lause 6.5.2. *Tämä lause ja todistus pohjautuvat lauseeseen 3.2 viitteessä [8]. Oletetaan, että*

(a) V on vektoriavaruus kerroinkunnalla $\mathbb{R}$ ja M on avaruuden V aliavaruus.

(b) Funktio $p : V \to \mathbb{R}$ täyttää ehdot

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *ja*
2. $p(tx) = tp(x)$

kaikille $x, y \in V$ ja $t \in \mathbb{R}_0$.

(c) Funktio $f : M \to \mathbb{R}$ on lineaarinen ja $f(x) \leq p(x)$ kaikille $x \in M$.

Tällöin on olemassa lineaarinen funktio $g : V \to \mathbb{R}$ siten, että $g(x) = f(x)$ kaikille $x \in M$ ja $-p(-x) \leq g(x) \leq p(x)$ kaikille $x \in V$.

Todistus. Jos $M \neq V$ valitaan $x_1 \in V$, $x_1 \notin V$, ja määritellään

$$M_1 := \{x + tx_1 \mid x \in M, t \in \mathbb{R}\}.$$

Nyt M_1 on vektoriavaruus. Koska

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x - x_1) + p(x_1 + y),$$

niin

$$f(x) - p(x - x_1) \leq p(y + x_1) - f(y)$$

kaikille $x, y \in M$. Olkoon

$$\alpha := \sup_{x \in M} (f(x) - p(x - x_1)).$$

Nyt

$$f(x) - \alpha \leq p(x - x_1) \tag{6.10}$$

kaikille $x \in M$ ja

$$f(y) + \alpha \leq p(y + x_1) \tag{6.11}$$

kaikille $x \in M$. Olkoon $t \in \mathbb{R}_0$. Määritellään $f_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ yhtälöllä

$$f_1(x + tx_1) = f(x) + t\alpha,$$

missä $x \in M$. Epäyhtälöstä (6.10) seuraa

$$f(t^{-1}x) - \alpha \leq p(t^{-1}x - x_1),$$

joten

$$f(x) - \alpha t \leq p(x - tx_1).$$

Vastaavasti epäyhtälöstä (6.11) seuraa

$$f(y) + \alpha t \leq p(y + tx_1)$$

kaikille $y \in M$. Edelleen

$$f_1(x - tx_1) = f(x) - t\alpha \leq p(x - tx_1)$$

ja

$$f_1(y + tx_1) = f(y) + t\alpha \leq p(y + tx_1).$$

Jos $t = 0$, niin meillä on $f(x) \leq p(x)$ kaikille $x \in M$. Täten

$$f_1(z + ux_1) \leq p(z + ux_1)$$

kaikille $u \in \mathbb{R}$ ja $z \in M$. Siis $f_1 \leq p$ avaruudessa M_1.

Olkoon P joukko kaikista järjestetyistä pareista (M', f'), missä M' on avaruuden V aliavaruus, joka sisältää avaruuden M, ja $f' : M \to \mathbb{R}$ lineaarinen funktio, joka on funktion f laajennus ja joka toteuttaa epäyhtälön $f'(x) \leq p(x)$ kaikille $x \in M'$. Järjestetään P osittain asettamalla $(M', f') \leq (M'', f'')$, jos ja vain jos $M' \subset M''$ ja $f''(x) = f'(x)$ kaikilla $x \in M'$. Hausdorffin maksimaalisuusteoreeman nojalla on olemassa joukon P maksimaalinen totaalisesti järjestetty osajoukko Ω.

Olkoon Φ joukko kaikista M' siten, että $(M', f') \in \Omega$. Nyt Φ on totaalisesti järjestetty osajoukkorelaatiolla, ja siten kaikkien joukon Φ jäsenten unioni $\tilde{M}$ on avaruuden V aliavaruus. Jos $x \in \tilde{M}$, niin $x \in M'$ jollekin $M' \in \Phi$ ja määritellään $g(x) := f'(x)$, missä f' on parin $(M', f') \in \Omega$ jälkimmäinen jäsen.

Nyt g on hyvin määritelty joukossa $\tilde{M}$, g on lineaarinen ja $g(x) \leq f'(x)$ kaikille $x \in \tilde{M}$. Jos $\tilde{M}$ olisi avaruuden V aito aliavaruus, niin tämän todistuksen ensimmäinen osa antaisi uuden laajennuksen funktiolle g, mikä olisi ristiriidassa joukon Ω maksimaalisuuden kanssa. Siten $\tilde{M} = V$.

Edelleen epäyhtälöstä $g \leq p$ seuraa, että

$$-p(-x) \leq -g(-x) = g(x)$$

kaikille $x \in V$. □

Lause 6.5.3. *Tämä lause ja todistus on otettu viitteestä [8, lause 3.3]. Olkoon V on vektoriavaruus kerroinkunnalla $K = \mathbb{R}$ tai $K = \mathbb{C}$, M avaruuden V aliavaruus, p seminormi avaruudessa V, $f : M \to K$ lineaarinen funktio siten, että $|f(x)| \leq p(x)$ kaikille $x \in M$. Tällöin f voidaan laajentaa lineaariseksi funktionaaliksi $g : V \to K$, jolle $|g(x)| \leq p(x)$ kaikille $x \in V$.*

Todistus. Jos $K = \mathbb{R}$, niin tämä lause seuraa lauseesta 6.5.2, koska nyt $p(-x) = p(x)$. Oletetaan, että $K = \mathbb{C}$. Määritellään $u = \operatorname{Re} f$. Lauseen 6.5.2 nojalla on olemassa reaalilineaarinen $U : V \to \mathbb{R}$ siten, että $U(x) = u(x)$ kaikilla $x \in M$ ja $U(y) \leq p(y)$ kaikilla $y \in V$. Olkoon g kompleksilineaarinen funktio avaruudessa

V siten, että $\operatorname{Re} g = U$. Nyt $g(x) = f(x)$ kaikilla $x \in M$. Jokaiselle $x \in V$ on olemassa $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ siten, että $\alpha g(x) = |g(x)|$. Täten

$$|g(x)| = g(\alpha x) = U(\alpha x) \leq p(\alpha x) = p(x).$$

□

Seurauslause 6.5.4. *Ks. [10, luku II.3.2]. Olkoon V normiavaruus, M avaruuden V normialiavaruus ja $f \in M^*$, jolle $|f(x)| \leq \|x\|$ kaikille $x \in M$. Tällöin funktionaalilla f on lineaarinen laajennus f_1 avaruudelle V siten, että $|f_1(x)| \leq \|x\|$ kaikille $x \in V$.*

Lause 6.5.5. ***Avoimen kuvauksen lause.*** *Tämä lause ja todistus pohjautuvat lauseeseen I.2.11 viitteessä [8].*

Oletetaan, että

(a) V on F-avaruus,

(b) W on topologinen vektoriavaruus,

(c) $f : V \to W$ on jatkuva ja lineaarinen ja

(d) $f[V]$ on toista kategoriaa avaruudessa W.

Tällöin

(i) $f[V] = W$,

(ii) f on avoin ja

(iii) W on F-avaruus.

Todistus. Kohdasta (ii) seuraa (i), koska W on itsensä ainoa epätyhjä avoin aliavaruus. Kohdan (ii) todistamiseksi olkoon V pisteen 0 ympäristö avaruudessa V. On osoitettava, että $f[V]$ sisältää pisteen 0 ympäristön avaruudessa W. Olkoon d translaatioinvariantti metriikka avaruudessa V siten, että d on yhteensopiva avaruuden V topologian kanssa. Olkoon

$$V_n := \{x \in V \mid d(x, 0) < 2^{-n} r\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

missä $r > 0$ on niin pieni, että $V_0 \subset V$. Osoitamme, että pisteen 0 eräs ympäristö W avaruudessa W toteuttaa ehdon

$$f[V] \subset \operatorname{clos} f[V_1] \subset W. \tag{6.12}$$

Koska $V_2 - V_2 \subset V_1$, niin

$$(\operatorname{clos} f[V_2]) - (\operatorname{clos} f[V_2]) \subset \operatorname{clos}(f[V_2] - f[V_2]) \subset \operatorname{clos} f[V_1].$$

Väitteen (6.12) ensimmäisen osan todistamiseksi riittää, että joukolla $\operatorname{clos} f[V_2]$ on epätyhjä sisäpuoli. Mutta

$$f[V] = \bigcup_{k=1} k f[V_2]$$

koska V_2 on pisteen 0 ympäristö. Ainakin yksi $kf[V_2]$ on siten toista kategoriaa avaruudessa W. Koska $y \mapsto ky$ on homeomorfismi avaruudelta W avaruudelle W, niin $f[V_2]$ on toista kategoriaa avaruudessa W, joten joukolla $f[V_2]$ on epätyhjä sisäpuoli.

Todistaaksemme toisen osan väitteestä (6.12) kiinnitetään $y_1 \in \operatorname{clos} f[V_1]$. Oletetaan, että $n \geq 1$ ja $y_n \in \operatorname{clos} f[V_n]$ on valittu. Edellä oleva todistus joukolle V_1 pätee yhtä hyvin joukolle V_{n+1}, joten $\operatorname{clos} f[V_{n+1}]$ sisältää pisteen 0 ympäristön. Täten

$$(y_n - \operatorname{clos} f[V_{n+1}]) \cap f[V_n] \neq \emptyset.$$

Siten olemassa $x_n \in V_n$ siten, että

$$f(x_n) \in y_n - \operatorname{clos} f[V_{n+1}].$$

Asetetaan $y_{n+1} := y_n - f(x_n)$. Nyt $y_{n+1} \in \operatorname{clos} f[V_{n+1}]$. Koska $d(x_n, 0) < 2^{-n}r$ kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$, summat $x_1 + \ldots + x_n$ muodostavat Cauchyn jonon joka avaruuden V täydellisyyden nojalla suppenee kohti jotakin $x \in V$, missä $d(x, 0) < r$. Täten $x \in V$. Koska

$$\sum_{n=1}^{m} f(x_n) = \sum_{n=1}^{m} (y_n - y_{n+1}) = y_1 - y_{m+1},$$

ja koska funktion f jatkuvuuden nojalla $y_{m+1} \to 0$ kun $m \to \infty$, niin $y_1 = f(x) \in f[V]$. Tämä osoittaa toisen osan väitteestä (6.12), joten (ii) on todistettu.

Olkoon $N := \ker f$. Voidaan osoittaa, että V/N on F-avaruus. Siten kohdan (iii) todistamiseksi riittää, jos löydämme isomorfismin $g : V/N \twoheadrightarrow W$, joka on myös homeomorfismi. Määritellään

$$g(x + N) := f(x), \quad x \in V.$$

Nyt g on isomorfismi ja $f(x) = g(\pi(x))$, missä $\pi : V \to V/N$ on jäännösluokkafunktio $\pi(x) = x + N$, $x \in V$.

Jos V on avoin avaruudessa W, niin

$$g^{-1}[V] = \pi[f^{-1}[V]]$$

on avoin, koska f on jatkuva ja π on avoin. Täten g on jatkuva. Jos E on avoin avaruudessa V/N, niin

$$g[E] = f[\pi^{-1}[E]]$$

on avoin, koska π on jatkuva ja f on avoin. Täten g on homeomorfismi. □

Määritelmä 6.5.6. Jos V ja W ovat epätyhjiä joukkoja ja f on funktio joukolta V joukkoon W, niin määrittelemme funktion f **kuvaajan** joukoksi

$$\{(x, f(x)) \mid x \in V\} \subset V \times W.$$

Lause 6.5.7. *Tämä lause ja todistus on otettu lauseesta I.2.14 viitteessä [8].*

Jos V on topologinen avaruus, W on Hausdorffin avaruus ja $f : V \to W$ on jatkuva, niin funktion f kuvaaja on suljettu.

Todistus. Olkoon G funktion f kuvaaja ja $\Omega := (V \times W) \setminus G$. Olkoon $(x_0, y_0) \in \Omega$. Nyt $y_0 \neq f(x_0)$. Täten pisteillä y_0 ja $f(x_0)$ on erilliset ympäristöt V ja W avaruudessa W. Koska f on jatkuva, pisteellä $x_0)$ on ympäristö U siten, että $f[U] \subset W$. Pisteen (x_0, y_0) ympäristö $U \times V$ sisältyy siten joukkoon Ω. Tämä osoittaa, että Ω on avoin. □

Lause 6.5.8. ***Suljetun kuvaajan lause.*** *Tämä lause ja todistus on otettu lauseesta I.2.15 viitteessä [8].*

Oletetaan, että

(a) V ja W ovat F-avaruuksia,

(b) $f : V \to W$ on lineaarinen ja

(c) $G := \{(x, f(x)) \mid x \in V\}$ on suljettu avaruudessa $V \times W$.

Tällöin f on jatkuva.

Todistus. Joukko $V \times W$ on vektoriavaruus, kun yhteenlasku ja skalaarilla kertominen määritellään alkioittain:

$$\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2).$$

On olemassa täydelliset translaatioinvariantit metriikat d_V ja d_W avaruuksissa V ja W, siten että nämä metriikat generoivat joukkojen V ja W topologiat. Asetetaan

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d_V(x_1, x_2) + d_W(y_1, y_2).$$

Nyt d on translaatioinvariantti metriikka avaruudessa $V \times W$, d ja avaruuden $V \times W$ tulotopologia ovat yhteensopivia, ja d tekee avaruudesta $V \times W$ F-avaruuden.

Koska f on lineaarinen, niin G on avaruuden $V \times W$ aliavaruus. Täydellisen metrisen avaruuden suljetut osajoukot ovat täydellisiä. Siten G on F-avaruus. Määritellään $\pi_1 : G \to V$ ja $\pi_2 : V \times W \to W$ asettamalla $\pi_1(x, f(x)) := x$ ja $\pi_2(x, y) := y$. Nyt π_1 on jatkuva lineaarinen bijektio F-avaruudelta G F-avaruuteen V. Avoimen kuvauksen lauseen perusteella $\pi_1^{-1} : V \to G$ on jatkuva. Nyt $f = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ ja π_2 on jatkuva, joten f on jatkuva. □

6.6 Differentiaalilaskentaa

Määritelmä 6.6.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ ja $f : A \to \mathbb{R}$ funktio. Funktion f **derivaatta** pisteessä $x \in A$ määritellään

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Jos yllä oleva raja-arvo on olemassa, niin sanomme, että f on **derivoituva** pisteessä x. Jos f on derivoituva kaikilla $x \in A$, niin sanomme, että f on **derivoituva**. Tällöin **derivaattafunktio** f' on funktio joukolta A joukkoon $\mathbb{R}$.

Avaruuden $\mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, alkioita kutsutaan **multi-indekseiksi**. Kun $\alpha \in \mathbb{N}^n$, niin määritellään

$$|\alpha| = |(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Määritelmä 6.6.2. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$ ja $f : A \to \mathbb{C}$ funktio. Kun $k \in Z(n)$, niin määritellään funktion f **osittaisderivaatta** pisteessä $\mathbf{x} \in A$ asettamalla

$$(\partial^k f)(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k^{[n]}) - f(\mathbf{x})}{h}.$$

Määritellään lisäksi

$$\partial^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f$$

kaikille $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ja $\mathbf{x} \in A$. Tässä asetetaan

$$\frac{\partial^0}{\partial x_k^0} f = f.$$

Määritellään lisäksi funktion f **gradientti** pisteessä $\mathbf{x} \in A$ kaavalla

$$(\nabla f)(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Määritelmä 6.6.3. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $U \subset \mathbb{R}^n$, $U \neq \emptyset$. Sanomme, että funktion $f : U \to \mathbb{C}$ on **sileä**, jos f on äärettömän monta kertaa derivoituva.

Oletetaan, että funktio $f : [x_0, x] \to \mathbb{R}$, missä $x_0, x \in \mathbb{R}$, ja sen $m + 1$ ensimmäistä derivaattaa ovat jatkuvia välillä $[x_0, x]$. Tällöin on voimassa **Taylorin kehitelmä** [4]

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_m(x) \tag{6.13}$$

missä jäännöstermi on

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}$$

jollekin $c \in [x_0, x]$.

Määritelmä 6.6.4. Kun $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ niin määritellään pisteitä $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ yhdistävä **viivasegmentti** kaavalla

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{z} = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}), t \in [0, 1]\}.$$

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on epätyhjä ja avoin, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $V(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \subset \Omega$. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jonka kaikki korkeintaan $m+1$ kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Tällöin on voimassa **Taylorin kehitelmä** [4]

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(\mathbf{x}_0) \cdot \prod_{\alpha=1}^{k} \left(x_{i_\alpha} - x_{i_\alpha}^{(0)} \right) + R_m(\mathbf{x}) \tag{6.14}$$

missä jäännöstermi on

$$R_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i_1,\ldots,i_{m+1}=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_{m+1}}} f\left(\mathbf{x}_0 + c(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\right) \tag{6.15}$$

$$\cdot \prod_{\alpha=1}^{m+1} \left(x_{i_\alpha} - x_{i_\alpha}^{(0)} \right) \tag{6.16}$$

jollekin $c \in]0, 1[$.

Taylorin kehitelmien voimassaolo on todistettu kirjassa [4].

6.7 Hilbertin ja Banachin avaruuksien tensoritulot

Tässä luvussa on käytetty kirjaa [9] ja viitettä [33]. Kun X ja Y ovat vektoriavaruuksia kerroinkunnalla K, niin määritellään

$$\mathrm{bil}(X \times Y) := \{\text{kaikki bilineaariset funktiot } X \times Y \to K\}$$

ja alkioiden välinen tensoritulo $x \otimes y \in \mathrm{bil}(X \times Y)^\sharp$ asettamalla

$$(x \otimes y)(A) := \langle A, x \otimes y \rangle := A(x, y)$$

kaikille $A \in \mathrm{bil}(X \times Y)$. Määritellään vektoriavaruuksien X ja Y välinen **algebrallinen tensoritulo** kaavalla

$$X \otimes Y := \mathrm{span}\{x \otimes y \mid x \in X, y \in Y\}$$

Kun $u \in X \otimes Y$, $u = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \otimes y_k$, $a_k \in K$, niin $u = 0$, jos ja vain jos

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi(x_k) \psi(y_k) = 0$$

kaikille $\varphi \in X^\sharp$ ja $\psi \in Y^\sharp$.

Olkoot H_1 ja H_2 Hilbertin avaruuksia sisätuloilla $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ ja $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ [30]. Voimme saada edellä määritellystä algebrallisesta tensoritulosta sisätuloavaruuden määrittelemällä

$$\langle \varphi_1 \otimes \varphi_2, \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle := \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle_1 \langle \varphi_2, \psi_2 \rangle_2$$

kaikille $\varphi_1, \psi_1 \in H_1$ ja $\varphi_2, \psi_2 \in H_2$ ja laajentamalla määrittely lineaarisuuden nojalla koko avaruuteen $H_1 \otimes H_2$. Muodostamalla täydellistymä näin saadusta sisätuloavaruudesta saadaan Hilbertin avaruuksien H_1 ja H_2 välinen tensoritulo, jota merkitään myös $H_1 \otimes H_2$.

Olkoot A ja B Banachin avaruuksia [33]. **Järkevä ristinormi** α on normi algebrallisessa tensoritulossa $A \otimes B$ siten, että

- $\alpha(a \otimes b) = \|a\|\|b\|$.
- Kaikille $\varphi \in X^*$ ja $\psi \in Y^*$ lineaarinen funktionaali $\varphi \otimes \psi$ normiavaruudessa $(A \otimes B, \alpha)$ on rajoitettu, ja $\|\varphi \otimes \psi\| = \|\varphi\|\|\psi\|$.

Normiavaruutta, joka saadaan varustamalla vektoriavaruus $A \otimes B$ normilla α merkitään $A \otimes_\alpha B$. On olemassa suurin järkevä ristinormi π, jota kutsutaan **projektiiviseksi ristinormiksi** ja joka määritellään

$$\pi(x) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|\|b_i\| \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \right\}$$

missä $x \in A \otimes B$. On olemassa pienin järkevä ristinormi ε, jota kutsutaan **injektiiviseksi ristinormiksi**, ja joka määritellään

$$\varepsilon(x) := \sup\{(\varphi \otimes \psi)(x) \mid \varphi \in A^*, \psi \in B^*, \|\varphi\| = \|\psi\| = 1\}$$

missä $x \in A \otimes B$. Albegrallisten tensoritulojen täydellistymiä näiden kahden normin suhteen kutsutaan **projektiiviseksi** ja **injektiiviseksi tensorituloksi** ja merkitään $A \hat{\otimes}_\pi B$ ja $A \hat{\otimes}_\varepsilon B$. Jos A ja B ovat Hilbertin avaruuksia, niin Hilbertin avaruuksien tensoritulon normi ei yleisesti ole kumpikaan normeista π tai ε. Hilbertin avaruuksien tensoritulon normia merkitään joskus σ.

Tasainen ristinormi α liittää jokaiseen pariin (X, Y) Banachin avaruuksia järkevän ristinormin $\alpha_{X,Y}$ avaruudessa $X \otimes Y$ siten, että seuraava ehto täyttyy: Olkoot X, W, Y ja Z Banachin avaruuksia. Tällöin kaikille jatkuville lineaarisille funktioille $S : X \to W$ ja $T : Y \to Z$ funktio $S \otimes T : X \otimes_\alpha Y \to W \otimes_\alpha Z$ on jatkuva ja $\|S \otimes T\| \leq \|S\|\|T\|$. Vektoriavaruutta $X \otimes Y$ varustettuna normilla $\alpha_{X,Y}$ merkitään $X \otimes_\alpha Y$ ja sen täydellistymää $X \hat{\otimes}_\alpha Y$. Sanomme, että tasainen ristinormi α on **äärellisesti generoitu**, jos jokaiselle parille (X, Y) Banachin avaruuksia ja jokaiselle $u \in X \otimes Y$ on

$$\alpha_{X,Y}(u) = \inf\{\alpha_{M,N}(u) \mid u \in M \otimes N, \dim M < \infty, \dim N < \infty\}.$$

Sanomme, että tasainen ristinormi α on **kofiniittisesti generoitu**, jos jokaiselle parille (X, Y) Banachin avaruuksia ja jokaiselle $u \in X \otimes Y$ on

$$\alpha_{X,Y}(u) = \sup\{\alpha_{(X/E) \otimes (Y/F)}\left((Q_E \otimes Q_F)\, u\right) \mid \dim X/E < \infty, \dim Y/F < \infty\},$$

missä $Q_E : X \to X/E$ ja $Q_F : Y \to Y/F$ ovat jäännösluokkaoperaattoreita. **Tensorinormi** määritellään äärellisesti generoiduksi tasaiseksi ristinormiksi. Projektiivinen ja injektiivinen ristinormi ovat molemmat tensorinormeja, ja niitä kutsutaan projektiiviseksi ja injektiiviseksi tensorinormiksi.

Jos E ja F ovat äärellisulotteisia Banachin avaruuksia ja α tensorinormi, niin

$$E \otimes_{\alpha'} F = (E^* \otimes_\alpha F^*)^*,$$

missä

$$\alpha'(u) = \sup\{|\langle u, v\rangle| \mid v \in E^* \otimes F^*, \alpha(v) \le 1\}$$

Äärettönulotteisessa tapauksessa avaruus $X \otimes Y$ ei ole enää sama kuin $(X^* \otimes_\alpha Y^*)^*$, mutta on olemassa kanoninen algebrallinen upotus siihen avaruudelta $X \otimes Y$. Siten avaruuden $(X^* \otimes_\alpha Y^*)^*$ duaalinormi määrittelee normin avaruudessa $X \otimes Y$, jota kutsumme **Schattenin duaalinormiksi** ja merkitsemma α^s. Siis meillä on upotus

$$X \otimes_{\alpha^s} Y \subset_1 (X^* \otimes_\alpha Y^*)^*$$

ja

$$\alpha^s(u) = \sup\{|\langle u, v\rangle| \mid v \in X^* \otimes Y^*, \alpha(v) \le 1\}.$$

Meillä on $\pi^s = \varepsilon$, mutta $\varepsilon^s < \pi$. Ongelma Schattenin duaalissa on, että se ei ole äärellisesti generoitu. Tämän ratkaisemiseksi määritellään **duaalinormi**

$$\alpha'(u) := \inf\{\alpha'_{E,F}(u) \mid u \in E \otimes F, \dim E < \infty, \dim F < \infty\}$$

missä E ja F käyvät läpi kaikki avaruuksien X ja Y äärellisulotteiset aliavaruudet joille $u \in E \otimes F$. Nyt meillä on $\pi' = \varepsilon$, $\varepsilon' = \pi$, ja yleisesti $(\alpha')' = \alpha$ jokaiselle tensorinormille α.

Neliöjärjestys σ_{sq} määritellään kuten kirjoissa [9] ja [11] seuraavassa:

Määritelmä 6.7.1. Määritellään funktio $\sigma_{\mathrm{sq}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ asettamalla

$$\sigma_{\mathrm{sq}}(0) := (0, 0)$$

ja

$$\sigma_{\mathrm{sq}}(k) := \begin{cases} (i, n); & k = n^2 + 1 \ \wedge \ i \in \{0, \ldots, n\} \ \wedge \ n \in \mathbb{N} \\ (n, n - i); & k = n^2 + n + i \ \wedge \ i \in \{1, \ldots, n\} \ \wedge \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Funktio σ_{sq} on bijektio joukolta $\mathbb{N}$ joukolle $\mathbb{N}^2$. Tensoritulokanta määritellään kuten kirjassa [9]:

Määritelmä 6.7.2. Olkoot E ja F Banachin avaruuksia, joilla on Schauderin kannat $(a_k)_{k=0}^\infty$ ja $(b_k)_{k=0}^\infty$, vastaavasti. Jonoa $(a_{\sigma_{\mathrm{sq}1}(k)} \otimes b_{\sigma_{\mathrm{sq}2}(k)})_{k=0}^\infty \subset E \otimes F$ sanotaan kantojen $(a_k)_{k=0}^\infty$ ja $(b_k)_{k=0}^\infty$ generoimaksi **tensoritulokannaksi**.

Tensoritulokanta on Schauderin kanta sekä avaruudelle $E \otimes_\varepsilon F$ että $E \otimes_\pi F$.

Tehtäviä:

6.1 Osoita, että kun matriisit tulkitaan lineaarisiksi funktioksi, Hermiten konjugaatin määritelmät 6.4.13 ja 4.1.10 ovat ekvivalentteja.

6.2 Määritellään funktio $f : l^1 \to l^\infty$, $f(\mathbf{x}) := \mathbf{x}$ kaikille $\mathbf{x} \in l^1$. Osoita, että f on jatkuva lineaarinen injektio, mutta käänteisfunktio $f^{-1} : f[l^1] \to l^1$ ei ole jatkuva.

6.3 Kirjoita auki yhden muuttujan Taylorin kehitelmä (6.13), kun $m = 4$.

6.4 Kirjoita auki monen muuttujan Taylorin kehitelmä (6.14), kun muuttujien lukumäärä $n = 3$ ja $m = 4$.

Luku 7

Distribuutiot

7.1 Fourier-muunnos ja Fourier'n sarjat

Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ ja $a_0 \in \mathbb{R}$. Sarjaa

$$S(x) := a_0 + \sum_{k=1} (a_k \cos(x) + b_k \sin(x))$$

kutsutaan **Fourier'n sarjaksi**.

Vektorien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ **skalaaritulo** määritellään kaavalla

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Määritellään funktion f **Fourier-muunnos** asettamalla [12, luku 1.2.1]

$$(\mathbf{F}f)(\mathbf{y}) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d\mu$$

ja **Fourier-käänteismuunnos**

$$(\mathbf{F}^{-1}f)(\mathbf{x}) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} f(\mathbf{y}) d\mu.$$

7.2 Tavalliset distribuutiot

Tämä luku pohjautuu viitteeseen [20]. Tässä luvussa oletetaan, että $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $U \subset \mathbb{R}^n$, $U \neq \emptyset$, U avoin.

Määritelmä 7.2.1. Sanomme, että $\varphi : U \to \mathbb{R}$ on **testifunktio**, jos se on äärettömän monta kertaa derivoituva ja kompaktikantajainen. Määritellään **testifunktioavaruus**

$$\mathcal{D}(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ on testifunktio}\}.$$

Testifunktioavaruuden kerroinkunta on $\mathbb{R}$.

Määritelmä 7.2.2. Olkoon X epätyhjä joukko. Kun $f \in \mathbb{R}^X$, määritellään

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Kun $(f_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{R}^X$, sanomme, että $f_k \to g \in \mathbb{R}^X$ tasaisesti, jos

$$\lim_{k \to \infty} \|g - f_k\|_\infty = 0.$$

Määritellään topologia avaruudessa $\mathcal{D}(U)$ seuraavasti: Kun $(\varphi_k)_{k=0}^\infty \subset \mathcal{D}(U)$ niin $\varphi_k \to \varphi \in \mathcal{D}(U)$, jos ja vain jos

1. On olemassa $K \subset U$, K kompakti siten, että

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{supp} \varphi_k \subset K.$$

2. Jokaiselle $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\partial^\alpha \varphi_k \to \partial^\alpha \varphi \text{ tasaisesti.}$$

$\mathcal{D}(U)$ on täydellinen lokaalikonveksi avaruus.

Yhtäpitävästi avaruuden $\mathcal{D}(U)$ topologia voidaan määritellä seuraavasti: Olkoon

$$U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i,$$

missä $U_i \in \mathbb{R}^n$ avoin, $K_i := \operatorname{clos} U_i$ kompakti, $i \in \mathbb{N}$. Nyt meillä on

$$\mathcal{D}(U) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_{K_i},$$

missä

$$D_{k_i} := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ on sileä ja } \operatorname{supp} f \subset K_i\}.$$

Jokaisessa D_{K_i} määritellään topologia seminormeilla

$$\|\varphi\|_\alpha := \max_{x \in K_i} |\partial^\alpha \phi|, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

ts. mielivaltaisen asteisten derivaattojen tasaisen suppenemisen topologia. Jokainen D_{K_i} on Fréchet'n avaruus. Olkoon $\iota_i : D_{K_i} \to \mathcal{D}(U)$ funktio $x \in D_{K_i} \mapsto x \in \mathcal{D}(U)$. Induktiivinen rajatopologia τ avaruudessa $\mathcal{D}(U)$ on hienoin lokaalikonveksin vektoriavaruuden topologia, jossa kaikki funktiot ι_i, $i \in \mathbb{N}$, ovat jatkuvia.

Määritellään **distribuutioavaruus** $\mathcal{D}'(U) := (\mathcal{D}(U))^*$. Avaruuden $\mathcal{D}'(U)$ alkioita kutsutaan **distribuutioiksi**. Siis kun $T \in \mathcal{D}'(U)$, niin T on jatkuva, jos ja vain jos

$$\lim_{k \to \infty} T(\varphi_k) = T\left(\lim_{k \to \infty} \varphi_k\right)$$

Riippumatta distribuutioavaruuteen valitusta topologiasta jono distribuutioita suppenee, jos ja vain jos se suppenee pisteittäin. Tämän takia distribuutioavaruuden topologiaksi valitaan joskus heikko-*-topologia, mutta usein käytetään myös rajoitetun suppenemisen topologiaa, joka tässä tapauksessa on sama kuin tasaisen suppenemisen topologia kompakteissa joukoissa. Merkitään

$$\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi)$$

kaikille $T \in \mathcal{D}'(U)$ ja $\varphi \in \mathcal{D}(U)$.

Määritelmä 7.2.3. Olkoon $f : U \to \mathbb{R}$ funktio. Sanomme, että f on **lokaalisti integroituva**, jos se on Lebesgue-integroituva kaikilla $K \subset U$, K kompakti.

Kaikki jatkuvat funktiot, kaikki testifunktiot ja kaikki L^p-funktiot (ks. luku 9.2) ovat lokaalisti integroituvia. Lokaalisti integroituva funktio f määrittelee distribuution T_f, jolle

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbf{x} \in U} f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mu$$

kaikille $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Usein merkitään

$$\langle f, \varphi \rangle := \langle T_f, \varphi \rangle.$$

Jos f ja g ovat lokaalisti integroituvia funktioita, niin $T_f = T_g$, jos ja vain jos $f = g$ melkein kaikkialla. Jos $R \in \mathcal{D}'(U)$ ja $R = T_h$ jollekin lokaalisti integroituvalle funktiolle h, niin sanomme, että distribuutio T on **säännöllinen**. Avaruus $\mathcal{D}(U)$ on tiheä avaruudessa $\mathcal{D}'(U)$. Jokaiselle $T \in \mathcal{D}'(U)$ on olemassa $(\varphi_k) \subset \mathcal{D}(U)$ siten, että

$$\langle \varphi_k, \psi \rangle \to \langle T, \psi \rangle$$

kaikille $\psi \in \mathcal{D}(U)$. Tämä seuraa Hahn-Banachin lauseesta, koska avaruuden $\mathcal{D}'(U)$ duaali sen heikko-*-topologialla on avaruus $\mathcal{D}(U)$.

Esimerkkejä:

1. Jos $0 \in U$, niin **Diracin delta** määritellään

   $$\delta(\varphi) := \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

   Diracin delta on distribuutio.

2. **Cauchyn pääarvo** määritellään kaavalla

   $$\left(\text{p.v.}\frac{1}{x}\right)(\varphi) := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} d\mu, \quad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

   Cauchyn pääarvo on distribuutio.

Jos $A : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(U)$ on lineaarinen funktio, joka on jatkuva heikko-*-topologiassa, niin A on mahdollista laajentaa funktioksi $A : \mathcal{D}'(U) \to \mathcal{D}'(U)$. Jos $A : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(U)$ on lineaarinen ja jatkuva, niin sen **transpoosi** määritellään funktioksi $A^t : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(U)$, jolle

$$\int_{\mathbf{x}\in U} A\varphi(\mathbf{x}) \cdot \psi(\mathbf{x}) d\mu = \int_{\mathbf{x}\in U} \varphi(\mathbf{x}) \cdot A^t\psi(\mathbf{x}) d\mu$$

kaikille $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(U)$. Jos A^t on olemassa ja jatkuva avaruudessa $\mathcal{D}(U)$, niin A voidaan laajentaa avaruudelle $\mathcal{D}'(U)$ määrittelemällä

$$\langle AT, \varphi \rangle := \langle T, A^t\varphi \rangle$$

kaikille $\varphi \in \mathcal{D}(U)$.

Olkoon $A : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(U)$,

$$A\varphi := \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}.$$

Jos $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(U)$, niin osittaisintegrointi antaa

$$\int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \psi d\mu = -\int_U \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_k} d\mu,$$

joten $A^t = -A$. Siis jos $T \in \mathcal{D}'(U)$, niin distribuution T osittaisderivaatta koordinaatin x_k suhteen määritellään kaavalla

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle := -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle$$

kaikille $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Yleisesti, jos $\alpha \in \mathbb{N}^n$, niin distribuution $T \in \mathcal{D}'(U)$ osittaisderivaatta $\partial^\alpha T$ määritellään

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

kaikille $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Jokainen distribuutio on äärettömän monta kertaa derivoituva, ja osittaisderivointi ∂^α on lineaarinen ja jatkuva operaatio avaruudessa $\mathcal{D}'(U)$. Useimmat muut derivaatan määritelmät eivät ole jatkuvia.

Jos $m : U \to \mathbb{R}$ on äärettömän monta kertaa derivoituva funktio ja T distribuutio, niin määritellään

$$\langle mT, \varphi \rangle := \langle T, m\varphi \rangle$$

kaikille $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Sileillä funktioilla kertomisen suhteen $\mathcal{D}'(U)$ on moduuli yli renkaan $C^\infty(U)$.

Määritelmä 7.2.4. Olkoot $U, V \subset \mathbb{R}^n$, U ja V epätyhjiä ja avoimia. Olkoon $F : V \to U$ funktio. Sanomme, että F on **submersio**, jos Jacobin derivaatta $dF(x)$ on lineaarinen surjektio jokaiselle $x \in V$.

Olkoot $T \in \mathcal{D}'(U)$, $U, V \in \mathbb{R}^n$, U ja V epätyhjiä ja avoimia ja $F : V \to U$ submersio. Nyt voidaan määritellä $T \circ F \in \mathcal{D}'(V)$. Joskus merkitään

$$F^\sharp : T \mapsto F^\sharp T = T \circ F.$$

Olkoot $U, V \subset \mathbb{R}^n$, U ja V epätyhjiä ja avoimia ja $V \subset U$. Määritellään funktio $E_{VU} : \mathcal{D}(V) \to \mathcal{D}(U)$ asettamalla

$$(E_{VU}(f))(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}); & \mathbf{x} \in V \\ 0; & \mathbf{x} \in U \setminus V \end{cases}$$

kaikille $\mathbf{x} \in U$. Määritellään $\rho_{VU} := (E_{VU})^t$. Jokaiselle $T \in \mathcal{D}'(U)$ rajoittuma $\rho_{VU}(T)$ on distribuutio avaruudessa $\mathcal{D}'(V)$:

$$\langle \rho_{VU}(T), \varphi \rangle = \langle T, E_{VU}(\varphi) \rangle$$

kaikille $\varphi \in \mathcal{D}(V)$.

Määritelmä 7.2.5. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$, U epätyhjä ja avoin. Olkoon $T \in \mathcal{D}'(U)$. Sanomme, että T **häviää** avoimessa joukossa $V \subset U$, jos

$$T \in \ker \rho_{VU}.$$

Toisin sanoen, T häviää joukossa V, jos ja vain jos

$$\langle T, \varphi \rangle = 0$$

kaikilla $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ joille $\operatorname{supp} \varphi \subset V$.

Määritelmä 7.2.6. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$, U epätyhjä ja avoin. Olkoon $T \in \mathcal{D}'(U)$. Määritellään distribuution T **kantaja** kaavalla

$$\operatorname{supp} T := U \setminus \{V \mid \rho_{VU}(T) = 0\}.$$

Jos $\operatorname{supp} T$ on kompakti, niin sanomme, että T on **kompaktikantajainen**.

Määritelmä 7.2.7. Olkoot $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}^n$ ja $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Distribuution T **a-dilataatio ja b-translaatio**, jota merkitään $T(a \cdot -b)$, määritellään [2]

$$\langle T(a \cdot -b), f \rangle := \frac{1}{a^n} \left\langle T, f\left(\frac{\cdot + b}{a}\right) \right\rangle$$

kaikille $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

7.3 Temperoidut distribuutiot

Tämä jakso pohjautuu kirjaan [12] ja viitteeseen [20]. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$. Olkoon

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(\mathbf{x})|, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,$$

missä $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on äärettömän monta kertaa derivoituva. Määritellään **Schwartzin avaruus**

$$S(\mathbb{R}^n) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ on äärettömän monta kertaa derivoituva ja } p_{\alpha,\beta}(\varphi) < \infty \text{ kaikille } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}.$$

Schwartzin avaruuden alkioita sanotaan **Schwartzin funktioiksi**. Seminormiperhe $p_{\alpha,\beta}$ määrittelee lokaalikonveksin topologian avaruudessa $S(\mathbb{R}^n)$. Schwartzin avaruus on metrisoituva ja täydellinen. Fourier-muunnos on bijektio avaruudelta $S(\mathbb{R}^n)$ avaruudelle $S(\mathbb{R}^n)$.

Olkoon $S'(\mathbb{R}^n)$ avaruuden $S(\mathbb{R}^n)$ topologinen duaali varustettuna vahvalla topologialla, ks. määritelmä 6.2.10. Avaruuden $S'(\mathbb{R}^n)$ alkioita sanotaan **temperoiduiksi distribuutioiksi**.

Huomautus 7.3.1. Avaruuden $S'(\mathbb{R}^n)$ alkiot eivät välttämättä ole funktioita.

Nyt $S'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Kaikilla temperoiduilla distribuutioilla on Fourier-muunnos, mutta kaikilla avaruuden $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ei ole.

Distribuutio T on temperoitu distribuutio, jos ja vain jos

$$\lim_{k\to\infty} T(\varphi_k) = 0$$

on tosi aina, kun

$$\lim_{k\to\infty} p_{\alpha,\beta}(\varphi_k) = 0$$

kaikille $(\varphi_k) \subset S(\mathbb{R}^n)$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Temperoidun distribuution derivaatta on temperoitu distribuutio. Kaikki kompaktikantajaiset distribuutiot ja kaikki neliöllisesti integroituvat funktiot ovat temperoituja distribuutioita. Kaikki funktiot $P(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$, missä $P(\mathbf{x})$ on polynomi ja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$, ovat temperoituja distribuutioita.

Laskettaessa Fourier-muunnoksia on parasta tarkastella kompleksiarvoisia testifunktioita ja kompleksisia lineaarisia distribuutioita. Kun $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, niin määritellään temperoidun distribuution T **Fourier**-muunnos asettamalla

$$(\mathbf{F}T)(\psi) := T(\mathbf{F}\psi)$$

kaikille $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Meillä on

$$\mathbf{F}\frac{dT}{dx} = \mathrm{i}x\mathbf{F}T.$$

Fourier-muunnos on bijektio avaruudelta $S'(\mathbb{R}^n)$ avaruudelle $S'(\mathbb{R}^n)$.

7.4 Konvoluutio

Määritelmä 7.4.1. Olkoon $\psi \in \S(\mathbb{R}^n)$. Sanomme, että ψ on **hitaasti kasvava**, jos kaikki funktion ψ derivaatat kasvavat korkeintaan yhtä nopeasti kuin polynomit.

Olkoon $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ ja olkoon $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ hitaasti kasvava äärettömän monta kertaa derivoituva funktio joukossa $\mathbb{R}^n$. Nyt $\psi T \in S'(\mathbb{R}^n)$ ja

$$\mathbf{F}(\psi T) = (\mathbf{F}\psi) * (\mathbf{F}T),$$

mikä on distribuutioiden $\mathbf{F}T$ ja $\mathbf{F}\psi$ (mahdollisesti funktio) **konvoluutio**.

Meillä on $\mathbf{F}1 = \delta$, missä 1 on vakiofunktio $f(\mathbf{x}) = 1$ ja δ on Diracin δ-distribuutio. Kun $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}^n}$, niin määritellään

$$\check{f}(\mathbf{x}) := f(-\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

ja konvoluutio

$$\langle f * T, \varphi \rangle := \langle T, \check{f} * \varphi \rangle, \quad f, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

On myös mahdollista määritellä kahden distribuution (avaruudella $\mathbb{R}^n$) konvoluutio, jos toinen niistä on kompaktikantajainen. Olkoot $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ja olkoon T kompaktikantajainen. Määritellää konvoluutio

$$(S * T) * \varphi := S * (T * \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Määritellään

$$(\tau_{\mathbf{x}}\varphi)(\mathbf{y}) := \varphi(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ ja } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

ja

$$\psi(\mathbf{x}) := \langle T, \tau_{-\mathbf{x}}\varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Vaihtoehtoinen määritelmä konvoluutiolle on

$$\langle S * T, \varphi \rangle := \langle S, \psi \rangle.$$

Olkoot $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ja $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti. On olemassa jatkuva ja kompaktikantajainen funktio $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja multi-indeksi $\alpha \in \mathbb{N}^n$ siten, että $f = \partial^\alpha F$ on sileä ja kompaktikantajainen. Jos $\operatorname{supp} f$ sisältää vain yhden pisteen x, niin

$$f = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha (\tau_x \delta).$$

Tehtäviä:

7.1 Olkoot $a, c \in \mathbb{R}_+$ ja $\mathbf{b}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$. Kun $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, määritellään $\tau_{a,\mathbf{b}}T := T(a \cdot -\mathbf{b})$. Osoita, että $\tau_{a,\mathbf{b}}(\tau_{c,\mathbf{d}}T) = \tau_{ac,c\mathbf{b}+\mathbf{d}}T$.

7.2 Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$. Määritellään $\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ (Diracin delta) asettamalla $\delta(\varphi) := \varphi(0)$ kaikille $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Osoita, että $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Luku 8

Mittateoriaa

Tässä luvussa on käytetty lähteitä [6, 14, 22].

8.1 σ-algebra ja σ-rengas

Määritelmä 8.1.1. Olkoon X epätyhjä joukko. Sanomme, että joukko $\mathcal{A} \subset 2^X$ on **joukkoalgebra**, jos seuraavat aksioomat ovat voimassa:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ ja $X \in \mathcal{A}$.

(2) Jos $E, F \in \mathcal{A}$, niin $E \cup F \in \mathcal{A}$.

(3) Jos $E \in \mathcal{A}$, niin $X \setminus E \in \mathcal{A}$.

Määritelmä 8.1.2. Olkoon X epätyhjä joukko ja $\mathcal{A} \subset 2^X$ joukkoalgebra. Sanomme, että $\mathcal{A}$ on **σ-algebra**, jos

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} J_k \in \mathcal{A}$$

kaikille $\{J_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$.

Määritelmä 8.1.3. Olkoon X epätyhjä joukko ja $\mathcal{R} \subset 2^X$. Sanomme, että $\mathcal{R}$ on **rengas**, jos

(1) $\cup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{R}$ kaikille $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

(2) Jos $A, B \in \mathcal{R}$, niin $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Jos lisäksi

(3) $\cup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$ kaikille numeroituville kokoelmille $A_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$, niin sanomme, että $\mathcal{R}$ on **σ-rengas**.

Seuraavissa esimerkeissä X oletetaan epätyhjäksi joukoksi.

Esimerkkejä:

1. $\mathcal{A} := \{\emptyset, X\}$ on σ-algebra.
2. 2^X on σ-algebra.
3. Kaikki joukon X äärelliset osajoukot muodostavat σ-algebran.
4. Kun X on ääretön joukko, kaikki joukon X korkeintaan numeroituvat osajoukot muodostavat σ-renkaan. Jos näiden joukkojen komplementit otetaan mukaan, niin saadaan σ-algebra.
5. Jos $\mathcal{B} \subset 2^X$, niin on olemassa yksikäsitteinen pienin joukkoalgebra $\mathcal{A}$ joka sisältää joukon $\mathcal{B}$.

8.2 Mitta

Määritelmä 8.2.1. Olkoon X epätyhjä joukko ja $\mathcal{R} \subset 2^X$ rengas. Sanomme, että funktio $\rho : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_*$ on **joukkofunktio**. Määritellään, että

- ρ on **ei-negatiivinen**, jos $\rho(E) \geq 0$ kaikilla $E \in \mathcal{R}$.
- ρ on **additiivinen**, jos $\rho(\emptyset) = 0$ ja $\rho(E \cup F) = \rho(E) + \rho(F)$ kaikille $E, F \in \mathcal{R}$, $E \cap F = \emptyset$.
- ρ on **täysin additiivinen**, jos $\rho(\emptyset) = 0$ ja

  $$\rho\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho(E_k)$$

  aina, kun

  (1) $E_k \in \mathcal{R},\ k \in \mathbb{N}$.

  (2) $E_i \cap E_j = \emptyset$ kaikille $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$.

  (3) $\cup_{k=0}^{\infty} E_k \in \mathcal{R}$.

Huomautus 8.2.2. Täysin additiivisuudesta seuraa additiivisuus, koska $\rho(\emptyset) = 0$.

Määritelmä 8.2.3. Olkoon E joukko ja $(E_k)_{k=0}^{\infty} \subset E$. Sanomme, että $(E_k)_{k=0}^{\infty}$ on **kasvava**, jos $E_k \subset E_l$ kaikille $k, l \in \mathbb{N},\ k < l$. Sanomme, että $(E_k)_{k=0}^{\infty}$ on **vähenevä**, jos $E_k \subset E_l$ kaikille $k, l \in \mathbb{N},\ k > l$.

Lause 8.2.4. *[6, lause 5.2] Olkoon ρ additiivinen joukkofunktio joukkorenkaassa $\mathcal{R}$. Jos ρ on täysin additiivinen, niin*

$$\rho(E) = \lim_{k\to\infty} \rho(E_k)$$

aina kun $(E_k)_{k=0}^{\infty}$ *on kasvava jono renkaan* $\mathcal{R}$ *alkioita siten, että*

$$E = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k \in \mathcal{R}.$$

Kääntäen, jos

$$\rho(E) = \lim_{k\to\infty} \rho(E_k)$$

kaikille tällaisille jonoille $(E_k)_{k=0}^{\infty}$*, niin* ρ *on täysin additiivinen.*

Todistus. [6, lause 5.2] Oletetaan ensin, että ρ on täysin additiivinen. Määritellään $F_0 := E_0$ ja $F_k = E_k \setminus E_{k-1}$ kun $k \in \mathbb{Z}_+$. Nyt

$$E_n := \sum_{k=0}^{n} F_k$$

ja joukot F_k ovat erillisiä. Additiivisuuden nojalla

$$\rho(E_n) = \bigcup_{k=0}^{n} \rho(F_k).$$

Edelleen

$$E = \bigcup_{k=0}^{\infty} F_k$$

ja täysin additiivisuudesta seuraa

$$\rho(E) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \rho(F_k) = \lim_{n\to\infty} E_n.$$

Oletetaan sitten, että (F_n) on erillinen jono renkaan $\mathcal{R}$ alkioita ja $\cup_{n=0}^{\infty} F_n \in \mathcal{R}$. Määritellään

$$E_n := \bigcup_{k=0}^{n} F_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyt (E_n) on kasvava jono renkaan $\mathcal{R}$ alkioita ja

$$F := \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}.$$

Oletuksen nojalla $\rho(F) = \lim_{n\to\infty} \rho(E_n)$ ja

$$\rho(E_n) = \sum_{k=0}^{n} \rho(F_k)$$

kaikille $n \in \mathbb{N}$. Täten

$$\rho(F) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho(F_k).$$

$\square$

Seurauslause 8.2.5. *[6, seurauslause 5.3] Olkoon X epätyhjä joukko ja $\mathcal{A} \subset 2^X$ joukkoalgebra. Olkoon $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_*$ additiivinen joukkofunktio, jolle $\rho(X) < +\infty$. Jos ρ on täysin additiivinen, niin*

$$\rho(E) = \lim_{k\to\infty} \rho(E_k)$$

aina, kun $(E_k)_{k=0}^{\infty}$ on vähenevä ja

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}.$$

Kääntäen, jos

$$\lim_{k\to\infty} \rho(E_k) = \rho(E)$$

kaikille tällaisille jonoille $(E_k)_{k=0}^{\infty}$, niin ρ on täysin additiivinen.

Määritelmä 8.2.6. Olkoon X epätyhjä joukko ja $\mathcal{R} \subset 2^X$ σ-rengas. Sanomme, että joukkofunktio $\rho : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_*$ on **mitta**, jos ρ on ei-negatiivinen ja täysin additiivinen.

Kun mittoja käytetään integraalien kanssa työskentelyyn, niin σ-rengas $\mathcal{R}$ oletetaan σ-algebraksi. Jos integrointi määriteltäisiin σ-renkaassa, joka ei ole σ-algebra, niin nollasta eroavat vakiofunktiot eivät olisi mitallisia. Oletus, että $\mathcal{R}$ on σ-algebra, ei vähennä tulosten yleisyyttä: on olemassa kanoninen tapa laajentaa mitta σ-renkaasta pienimmälle σ-algebralle, joka sisältää ko. σ-renkaan.

Todennäköisyyskenttä määritellään mitta-avaruutena [26] (Ω, F, P), missä Ω on **otosavaruus**, σ-rengas $F \subset 2^{\Omega}$ on **tapahtuma-avaruus** ja $P : F \to [0, 1]$ on **todennäköisyysmitta**. Todennäköisyysmitan on täytettävä ehto $P(\Omega) = 1$.

8.3 Borelin joukot

Olkoon X metrinen avaruus. Kun $T \subset 2^X$, määritellään

(1) T_σ: kaikki joukon T alkioiden korkeintaan numeroituvat unionit

(2) T_δ: kaikki joukon T alkioiden korkeintaan numeroituvat leikkaukset

(3) $T_{\delta\sigma} := (T_\delta)_\sigma$

Nyt määritellään transfiniittisella induktiolla jono G^m, missä m on ordinaaliluku, seuraavasti:

(1) Olkoon G^0 kaikkien avaruuden X avointen joukkojen joukko.

(2) Jos i ei ole rajaordinaali, niin ordinaalilla i on välittömästi edeltävä ordinaali $i - 1$. Asetetaan
$$G^i := (G^{i-1})_{\delta\sigma}.$$

(3) Jos i on rajaordinaali, asetetaan

$$G^i := \bigcup_{j<i} G^j.$$

Nyt **Borelin algebra** määritellään joukoksi G^{ω_1}, missä ω_1 on ensimmäinen ylinumeroituva ordinaaliluku. Siis Borelin algebra voidaan generoida avointen joukkojen joukolta iteroimalla operaatiota $G \mapsto G_{\delta\sigma}$ ensimmäiseen ylinumeroituvaan ordinaalilukuun asti. Borelin algebran alkioita sanotaan **Borelin joukoiksi**.

Esimerkkejä:

1. Borelin algebra reaalilukujen joukossa on pienin σ-algebra, joka sisältää kaikki reaalilukuvälit.

Määritelmä 8.3.1. Jos X on epätyhjä joukko ja $\mathcal{A}$ on σ-algebra joukossa X, niin sanomme paria $(X, \mathcal{A})$ **mitalliseksi avaruudeksi**.

Määritelmä 8.3.2. Olkoon E metrinen avaruus ja B sen Borelin joukkojen joukko. Sanomme paria (E, B) **Borelin avaruudeksi**.

Määritelmä 8.3.3. Sanomme täydellistä, separoituvaa ja metrisoituvaa topologista avaruutta **puolalaiseksi avaruudeksi**.

Lause 8.3.4. *Olkoon X puolalainen avaruus. Tällöin X on Borelin avaruutena isomorfinen jollekin seuraavista:*

(1) $\mathbb{R}$

(2) $\mathbb{Z}$ *tai*

(3) äärelliseen avaruuteen.

Määritelmä 8.3.5. Kutsumme puolalaiseen avaruuteen liittyvää Borelin avaruutta **standardiksi Borelin avaruudeksi**.

8.4 Mitalliset funktiot ja Lebesguen integraali

Määritelmä 8.4.1. Olkoot (X, Σ) ja (Y, T) mitallisia avaruuksia. Sanomme, että funktio $f : X \to Y$ on **mitallinen**, jos $f^{-1}[E] \in \Sigma$ jokaiselle $E \in T$.

Mitallisuus riippuu σ-algebroista Σ ja T. Jos (X, Σ) ja (Y, T) ovat Borelin avaruuksia, mitallista funktiota $f : X \to Y$ kutsutaan myös **Borelin funktioksi** tai **Borel-mitalliseksi funktioksi**.

Lebesgue-mitallinen funktio on funktio $f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$, missä $\mathcal{L}$ on Lebesgue-mitallisten joukkojen muodostama σ-algebra ja $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ on kompleksilukujen $\mathbb{C}$ Borelin algebra. Lebesgue-mitalliset funktiot ovat kiinnostavia analyysissä, koska niitä voidaan integroida. Tapauksessa $f : X \to \mathbb{R}$ funktio f

on Lebesgue-mitallinen, jos ja vain jos joukko $\{f > \alpha\}$ on mitallinen kaikille $\alpha \in \mathbb{R}$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että jokin joukoista $\{f \geq \alpha\}$, $\{f < \alpha\}$ tai $\{f \leq \alpha\}$ on mitallinen kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$. Jatkuvat funktiot, monotoniset funktiot, porrasfunktiot ja Riemann-integroituvat funktiot ovat kaikki Lebesgue-mitallisia. Funktio $f : X \to \mathbb{C}$ on mitallinen, jos ja vain jos $\operatorname{Re} f$ ja $\operatorname{Im} f$ ovat mitallisia.

Määritelmä 8.4.2. Olkoon X epätyhjä joukko ja $E \subset X$. Määritellään joukon E **karakteristinen funktio** asettamalla

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1; & x \in E \\ 0; & x \notin E \end{cases}$$

Määritelmä 8.4.3. Olkoon X epätyhjä joukko. Sanomme funktiota $s : X \to \mathbb{R}_*$ **yksinkertaiseksi funktioksi**, jos $s[X] \subset \mathbb{R}$ on äärellinen.

Jokaisella yksinkertaisella funktiolla s on **kanoninen kehitelmä**

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k},$$

missä reaaliluvut $c_k,\ k = 1, \ldots, n$ ovat keskenään erisuuria ja joukot $E_k,\ k = 1, \ldots, n$ ovat epätyhjiä ja erillisiä. Itse asiassa $s[X] = \{c_k \mid k = 1, \ldots, n\}$ ja E_k on se joukko, jossa s saa arvon c_k. Olkoon $V :=]c, +\infty]$. Joukko $s^{-1}[V]$ on unioni joukoista E_k, joille $c < c_k$, mistä seuraa, että s on mitallinen funktio, jos ja vain jos kaikki joukot E_k kanonisessa kehitelmässä ovat mitallisia.

Seuraavassa $(X, \mathcal{A})$ on mitallinen avaruus ja $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_*$ mitta. Olkoon s yksinkertainen funktio ja $s(x) \geq 0$ kaikilla $x \in X$. Olkoon E mitallinen joukko ja

$$s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}$$

funktion s kanoninen kehitelmä. Määritellään

$$\mathcal{I}_E(s) := \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k \cap E).$$

Kun $f : X \to \mathbb{R}$ ja $g : X \to \mathbb{R}$ ovat funktioita, niin merkitään $f \leq g$, jos ja vain jos $f(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in X$. Määritellään vastaavasti $f \geq g$.

Määritelmä 8.4.4. Kun $f : E \to \mathbb{R}$ on mitallinen funktio, $0 \leq f$ ja $E \subset X$ on mitallinen joukko, määritellään funktion f **Lebesguen integraali** joukossa E mitan μ suhteen asettamalla

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &= \int_E f(x) d\mu(x) \\ &:= \sup\{\mathcal{I}_E(s) \mid s \text{ on yksinkertainen funktio ja } 0 \leq s \leq f\} \in \mathbb{R}_*. \end{aligned}$$

Yleiselle mitalliselle funktiolle $f : E \to \mathbb{R}$, joka ei välttämättä ole ei-negatiivinen, integraali voidaan tai ei voida määritellä. Kirjoitetaan $f = f^+ - f^-$, missä $f^+ \geq 0$ ja $f^- \geq 0$. Funktiot f^+ ja f^- ovat mitallisia, joten $\int_E f^+ d\mu$ ja $\int_E f^- d\mu$ ovat hyvin määriteltyjä joukon $\mathbb{R}_*$ alkioita. Jos $\int_E f^+ d\mu$ ja $\int_E f^- d\mu$ eivät ole molemmat äärettömiä, määritellään

$$\int_E f d\mu = \int_E f(x) d\mu(x) := \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Tämä määrittely on yhteensopiva erikoistapauksen $f \geq 0$ kanssa, koska sellaiselle f on $f^- = 0$ ja siten $\int_E f^- d\mu = 0$. Sanomme, että $f : E \to \mathbb{R}$ on **integroituva**, jos $\int_E f^+ d\mu$ ja $\int_E f^- d\mu$ ovat molemmat äärellisiä.

Määritelmä 8.4.5. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$, E Borelin avaruus ja $f : E \to \mathbb{R}$ Borel-mitallinen funktio. Määritellään

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in E} f(x) := \inf\{r \in \mathbb{R} \mid \mu(\{f(x) \mid f(x) > r\}) = 0\}$$

ja

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in E} f(x) := \sup\{r \in \mathbb{R} \mid \mu(\{f(x) \mid f(x) < r\}) = 0\}.$$

Määritelmä 8.4.6. Olkoon $(X, \mathcal{A})$ mitallinen avaruus ja $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_*$ mitta. Olkoon $P(x)$, $x \in X$, predikaatti. Sanomme, että $P(x)$ on tosi **melkein kaikkialla**, jos

$$\mu(\{x \in X \mid \neg P(x)\}) = 0.$$

Tehtäviä:

8.1 Olkoon X epätyhjä joukko ja $\mathcal{R} \subset 2^X$ joukkorengas. Olkoon $\rho : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_*$ täysin additiivinen joukkofunktio. Osoita, että ρ on additiivinen.

8.2 Olkoon $\mathcal{A} := 2^{\mathbb{N}}$ ja

$$\mu(A) = \#A, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Osoita, että μ on mitta.

Luku 9

Yleisiä funktioavaruuksia

9.1 Tarvittavia määritelmiä

Määritelmä 9.1.1. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funktio. Kun $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geq 2$, määritellään **differenssit**

$$\begin{aligned}(\Delta_{\mathbf{h}} f)(x) &:= (\Delta^1_{\mathbf{h}} f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) \\ (\Delta^m_{\mathbf{h}} f)(\mathbf{x}) &:= (\Delta_{\mathbf{h}}(\Delta^{m-1}_{\mathbf{h}} f))(\mathbf{x})\end{aligned}$$

kaikille $\mathbf{h}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Jos f on Borel-mitallinen, määritellään **jatkuvuusmoduuli**

$$\omega^m_p(f,t) := \sup\{\|\Delta^m_{\mathbf{h}} f\|_p \mid \mathbf{h} \in \bar{B}(\mathbb{R}^n; 0, t)\}.$$

Määritellään edelleen

$$\omega(f,t) := \omega^1_\infty(f,t), \quad t \in \mathbb{R}_0.$$

Merkitsemme jatkuvaa Fourier-muunnosta $\mathbf{F}$ ja Fourier-käänteismuunnosta $\mathbf{F}^{-1}$. Ks. luku 7.1.

9.2 $L^p(\mathbb{R}^n)$

Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $\mathrm{bor}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ kaikkien Borel-mitallisten funktioiden $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ joukko. Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ joukossa $\mathrm{bor}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ asettamalla

$$f \sim g \iff \mu(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})\}) = 0.$$

Kun $p \in [1, \infty[$, määritellään

$$\|C\|_p := \|f\|_p := \left(\int_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{9.1}$$

missä $C \in \mathrm{bor}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})/\sim$ ja $f \in C$. Kun $p = \infty$, määritellään

$$\|C\|_\infty := \|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| \tag{9.2}$$

missä $C \in \mathrm{bor}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})/\sim$ ja $f \in C$.

Huomautus 9.2.1. Kaavojen (9.1) ja (9.2) arvo ei riipu funktion $f \in C$ valinnasta.

Kun $p \in [1, \infty]$, määritellään Banachin avaruus

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \{C \in \mathrm{bor}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})/\sim \mid \|C\|_p < \infty\}$$

Joukko $L^2(\mathbb{R}^n)$ on myös Hilbertin avaruus, kun sisätulo määritellään

$$\langle C, D\rangle := \int_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})^* g(\mathbf{x}) d\mu$$

missä $C, D \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $f \in C$ ja $g \in D$.

Esimerkkejä:

1. Vakiofunktio $f(\mathbf{x}) = c \in \mathbb{C}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, kuuluu avaruuteen $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. Jokainen jatkuva ja kompaktikantajainen funktio kuuluu kaikkiin avaruuksiin $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$.
3. Kohdan 1 vakiofunktio ei kuulu mihinkään avaruuteen $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p < \infty$.

9.3 $C_b(T)$

Määritelmä 9.3.1. Olkoon X epätyhjä joukko ja $f : X \to \mathbb{C}$ funktio. Sanomme, että f on **rajoitettu**, jos on olemassa luku $M \in \mathbb{R}_+$ siten, että $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in X$.

Määritelmä 9.3.2. Olkoon T topologinen avaruus. Määritellään Banachin avaruus

$$C_b(T) := \{f \mid f \text{ on jatkuva ja rajoitettu funktio avaruudelta } T \text{ joukolle } \mathbb{C}\}$$

normilla

$$\|f \mid C_b(T)\| := \sup_{x\in T} |f(x)|.$$

9.4 $C_0(T)$

Ks. myös [7].

Määritelmä 9.4.1. Olkoon T lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus. Sanomme, että funktio $f : T \to \mathbb{C}$ **häviää äärettömyydessä**, jos joukko $\{t \in T \mid |f(t)| \geq \varepsilon\}$ on kompakti jokaiselle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Määritellään Banachin avaruus

$$C_0(T) := \{f : T \to \mathbb{C} \mid f \text{ häviää äärettömyydessä}\}$$

normilla

$$\|f \mid C_0(T)\| := \sup_{x\in T} |f(x)|.$$

9.5 $C_{\mathbf{u}}(E)$

Määritelmä 9.5.1. Olkoon (E,d) metrinen avaruus ja $f : E \to \mathbb{C}$ funktio. Sanomme, että f on **tasaisesti jatkuva**, jos

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : \forall x, y \in E : (d(x,y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,.$$

Määritelmä 9.5.2. Olkoon E metrinen avaruus. Määritellään Banachin avaruus

$$C_{\mathrm{u}}(E) := \{f : E \to \mathbb{C} \mid f \text{ on rajoitettu ja tasaisesti jatkuva}\}$$

normilla

$$\|f \mid C_{\mathrm{u}}(E)\| := \sup_{x \in E} |f(x)|.$$

9.6 $C_{\mathbf{com}}(T)$

Olkoon T lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus. Määritellään

$$C_{\mathrm{com}}(T) := \{f \in C_b(T) \mid \operatorname{supp} f \text{ on kompakti}\}$$

normilla

$$\|f \mid C_{\mathrm{com}}(T)\| := \sup_{x \in T} |f(x)|.$$

$C_{\mathrm{com}}(T)$ ei ole täydellinen ja se on tiheä avaruudessa $C_0(T)$ [3].

9.7 $C^m(\mathbb{R}^n)$

Tässä $m \in \mathbb{N}$. Ks. [10, luku 2.2.2].

$$C^m(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \partial^\alpha f \in C_{\mathrm{u}}(\mathbb{R}^n) \text{ kaikille } |\alpha| \le m\}$$
$$\|f \mid C^m(\mathbb{R}^n)\| := \sum_{|\alpha| \le m} \|\partial^\alpha f \mid L^\infty(\mathbb{R}^n)\|, \quad f \in C^m(\mathbb{R}^n)$$

Huomautus 9.7.1. $C^0(\mathbb{R}^n) =_{\mathrm{tvs}} C_u(\mathbb{R}^n)$.

9.8 Hölderin avaruus $C^s(\mathbb{R}^n)$

Ks. [10, luku 2.2.2]. Tässä $s > 0$ ja $s \notin \mathbb{Z}$. Asetetaan

$$s = [s] + \{s\},$$

missä $[s] \in \mathbb{Z}$ ja $0 \le \{s\} < 1$ ja määritellään **Hölderin avaruus**

$$C^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^{[s]}(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \|f \mid C^s(\mathbb{R}^n)\| < \infty \right\},$$

missä normi määritellään

$$\|f \mid C^s(\mathbb{R}^n)\| := \|f \mid C^{[s]}(\mathbb{R}^n)\| + \sum_{|\alpha| = [s]} \sup \left\{ \frac{|(\partial^\alpha f)(\mathbf{x}) - (\partial^\alpha f)(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{\{s\}}} \,\middle|\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, x \ne y \right\}.$$

9.9 Zygmundin avaruus $\mathcal{Z}^s(\mathbb{R}^n)$

Ks. [10, luku 2.2.2]. Tässä $s > 0$. Asetetaan

$$s = [s]^- + \{s\}^+,$$

missä $[s]^- \in \mathbb{Z}$ ja $0 < \{s\}^+ \leq 1$ ja määritellään **Zygmundin avaruus**

$$\mathcal{Z}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^{[s]^-}(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \|f \mid \mathcal{Z}^s(\mathbb{R}^n)\| < \infty \right\},$$

missä normi määritellään

$$\begin{aligned}\|f \mid \mathcal{Z}^s(\mathbb{R}^n)\| :=& \|f \mid C^{[s]^-}(\mathbb{R}^n)\| \\ &+ \sum_{|\alpha|=[s]^-} \sup \left\{ \|\mathbf{h}\|^{-\{s\}^+} \|\Delta^2_{\mathbf{h}} \partial^\alpha f \mid C_{\mathrm{u}}(\mathbb{R}^n)\| \;\middle|\; \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}.\end{aligned}$$

Huomautus 9.9.1. Kun $s \notin \mathbb{Z}$, niin $\mathcal{Z}^s(\mathbb{R}^n) =_{\mathrm{tvs}} C^s(\mathbb{R}^n)$ [12, huomautus 2.2.2/3].

9.10 Sobolevin avaruus $W^m_p(\mathbb{R}^n)$

Ks. [10, luku 2.2.2]. Kun $1 < p < \infty$ ja $m \in \mathbb{Z}_+$, määritellään **Sobolevin avaruus**

$$W^m_p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \mid \|f \mid W^m_p(\mathbb{R}^n)\| < \infty \right\},$$

missä normi määritellään

$$\|f \mid W^m_p(\mathbb{R}^n)\| := \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f \mid L^p(\mathbb{R}^n)\|.$$

Asetetaan lisäksi $W^0_p(\mathbb{R}^n) := L^p(\mathbb{R}^n)$. Tässä derivaatta $\partial^\alpha f$ on distribuutioderivaatta.

9.11 Slobodeckij'n avaruus $W^s_p(\mathbb{R}^n)$

Ks. [10, luku 2.2.2]. Kun $1 \leq p < \infty$ ja $s > 0$, $s \notin \mathbb{Z}$, määritellään **Slobodeckij'n avaruus**

$$W^s_p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in W^{[s]}_p(\mathbb{R}^n) \mid \|f \mid W^s_p(\mathbb{R}^n)\| < \infty \right\},$$

missä normi määritellään

$$\begin{aligned}\|f \mid W^s_p(\mathbb{R}^n)\| :=& \|f \mid W^{[s]}_p(\mathbb{R}^n)\| \\ &+ \sum_{|\alpha|=[s]} \left(\int_{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|(\partial^\alpha f)(\mathbf{x}) - (\partial^\alpha f)(\mathbf{y})|^p}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{n+\{s\}p}} d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Tässä derivaatta $\partial^\alpha f$ on distribuutioderivaatta.

9.12 Bessel-potentiaaliavaruus $H_p^s(\mathbb{R}^n)$

Ks. [10, luku 2.2.2]. Kun $s \in \mathbb{R}$ ja $1 < p < \infty$ määritellään **Bessel-potentiaaliavaruus**

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) := \{f \in S'(\mathbb{R}^n) \mid \|f \mid H_p^s(\mathbb{R}^n)\| < \infty\}$$

missä normi määritellään

$$\|f \mid H_p^s(\mathbb{R}^n)\| := \|\mathbf{F}^{-1}\left(1+\|\mathbf{x}\|^2\right)^{s/2}\mathbf{F}f \mid L^p(\mathbb{R}^n)\|.$$

9.13 Paikallinen Hardyn avaruus $h_p(\mathbb{R}^n)$

Ks. [10, luku 2.2.2]. Olkoon $0 < p < \infty$ ja φ testifunktio, jolle $\varphi(0) = 1$. Määritellään $\varphi_t(x) := \varphi(tx)$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ ja $t > 0$. Määritellään **paikallinen Hardyn avaruus** asettamalla

$$h_p(\mathbb{R}^n) := \{f \in S'(\mathbb{R}^n) \mid \|f \mid h_p(\mathbb{R}^n)\|^{\varphi} < \infty\}$$

missä normi määritellään

$$\|f \mid h_p(\mathbb{R}^n)\|^{\varphi} := \left\|\sup_{0<t<1} |\mathbf{F}^{-1}\varphi_t\mathbf{F}f| \;\middle|\; L^p(\mathbb{R}^n)\right\|.$$

9.14 bmo($\mathbb{R}^n$)

Ks. [10, luku 2.2.2].

Määritelmä 9.14.1. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$. Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$, $k = 1, \ldots, n$. Sanomme joukkoa

$$Q := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_k \le x_k \le b_k, k = 1, \ldots, n\}$$

kuutioksi. Määritellään lisäksi

$$|Q| := \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k).$$

Jos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ on Lebesgue-integroituva funktio ja Q on kuutio avaruudessa $\mathbb{R}^n$, niin asetetaan

$$f_Q := \frac{1}{|Q|}\int_{\mathbf{x}\in Q} f(\mathbf{x})d\mu.$$

Määritellään

$$\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n) := \{f \mid f \text{ on paikallisesti Lebesgue-integroituva joukossa } \mathbb{R}^n, \|f \mid \mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)\| < \infty\},$$

missä normi määritellään

$$\|f \mid \mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)\| := \sup_{|Q|\le 1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbf{x}\in Q}|f(\mathbf{x}) - f_Q|d\mu\right) + \sup_{|Q|>1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbf{x}\in Q}|f(\mathbf{x})|d\mu\right).$$

9.15 Besovin ja Triebel-Lizorkinin avaruudet

Määritelmä 9.15.1. [10, luku 1.2.2] Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $p, q \in]0, \infty]$. Olkoon $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ jono Borel-mitallisia funktioita $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Määritellään

$$\|f_k \mid L^p(l^q)\| := \big\|\|f_k(\cdot)|l^q\|\big|L^p\big\| = \left(\int_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(\mathbf{x})|^q\right)^{p/q} d\mu\right)^{1/p}$$

ja

$$\|f_k \mid l^q(L^p)\| := \big\|\|f_k(\cdot)|L^p\|\big|l^q\big\| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} |f_k(\mathbf{x})|^p d\mu\right)^{q/p}\right)^{1/q}$$

Huomautus 9.15.2. Yllä oleviin integraalikaavoihin tulee muutoksia, jos $p = \infty$ tai $q = \infty$.

Määritelmä 9.15.3. [10, luku 1.2.2] Olkoon A (reaalinen tai kompleksinen) vektoriavaruus. Funktiota $\|\cdot \mid A\|$ sanotaan **kvasinormiksi**, jos se toteuttaa tavalliset normin aksioomat (N1), (N2) ja (N3) lukuunottamatta kolmioepäyhtälöä (N4), joka korvataan aksioomalla

$$\|a_1 + a_2 \mid A\| \leq c(\|a_1 \mid A\| + \|a_2 \mid A\|)$$

jollekin vakiolle $c \in \mathbb{R}_+$, joka ei riipu vektoreista a_1 ja a_2.

Määritelmä 9.15.4. [10, luku 2.3.1]. Olkoon $\Phi(\mathbb{R}^n)$ kaikkien sellaisten systeemien $\varphi := (\varphi_j)_{j=0}^{\infty} \subset S(\mathbb{R}^n)$ joukko, joille

(1) $\operatorname{supp} \varphi_0 \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq 2\}$.

(2) $\operatorname{supp} \varphi_j \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid 2^{j-1} \leq \|\mathbf{x}\| \leq 2^{j+1}\}, \quad j \in \mathbb{Z}_+$.

Määritelmä 9.15.5. [10, luku 2.3.1]. Olkoon $s \in \mathbb{R}$ ja $0 < q \leq \infty$. Olkoon $\varphi := (\varphi_j)_{j=0}^{\infty} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$.

(1) Jos $0 < p \leq \infty$, niin määritellään **Besovin avaruus**

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \{f \in S'(\mathbb{R}^n) \mid \|f \mid B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\|^{\varphi} < \infty\}$$

missä

$$\|f \mid B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\|^{\varphi} := \|2^{sj}\mathbf{F}^{-1}\varphi_j \mathbf{F} f \mid l^q(L^p(\mathbb{R}^n))\|.$$

(2) Jos $0 < p < \infty$, niin määritellään **Triebel-Lizorkinin avaruus**

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \{f \in S'(\mathbb{R}^n) \mid \|f \mid F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\|^{\varphi} < \infty\}$$

missä

$$\|f \mid F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\|^{\varphi} := \|2^{sj}\mathbf{F}^{-1}\varphi_j \mathbf{F} f \mid L^p(\mathbb{R}^n, l^q)\|.$$

Huomautus 9.15.6. $\mathbf{F}^{-1}\varphi_j\mathbf{F}f = \mathbf{F}^{-1}(\varphi_j\mathbf{F}f)$ on analyyttinen funktio avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Kvasinormit $\|f \mid B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\|^\varphi$ ja $\|f \mid F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\|^\varphi$ riippuvat tietysti valitusta systeemistä $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, mutta ne ovat kaikki ekvivalentteja kvasinormeja kvasinormiavaruuksissa $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ ja $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Jos $p, q \in [1, \infty]$, niin $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ Banachin avaruus. Jos $p \in [1, \infty[$ ja $q \in [1, \infty]$, niin $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ on Banachin avaruus [12, theorem 2.3.3].

Jos A_1 ja A_2 ovat kvasinormiavaruuksia, niin $A_1 \subset_{\mathrm{c}} A_2$ tarkoittaa, että avaruus A_1 on **jatkuvasti upotettu** avaruuteen A_2, ts. on olemassa vakio $t \in \mathbb{R}_+$ siten, että $\|a \mid A_1\| \le t\|a \mid A_2\|$ kaikille $a \in A_1$ [10, luku 2.3.2].

Lause 9.15.7. *[12, lause 2.3.2/2]*

(1) Olkoon $0 < q_0 \le q_1 \le \infty$, $0 < p \le \infty$ *ja* $s \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

$$B^s_{p,q_0}(\mathbb{R}^n) \subset_c B^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n).$$

(2) Olkoon $0 < q_0 \le \infty$, $0 < q_1 \le \infty$, $0 < p \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$ *ja* $\varepsilon > 0$. *Tällöin*

$$B^{s+\varepsilon}_{p,q_0}(\mathbb{R}^n) \subset_c B^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n).$$

(3) Olkoon $0 < q \le \infty$, $0 < p < \infty$ *ja* $s \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

$$B^s_{p,\min\{p,q\}}(\mathbb{R}^n) \subset_c F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset_c B^s_{p,\max\{p,q\}}(\mathbb{R}^n).$$

Lause 9.15.8. *[12, lause 2.3.3] Olkoon* $n \in \mathbb{Z}_+$. *Kun* $p, q \in]0, \infty], s \in \mathbb{R}$ *niin meillä on voimassa jatkuvat upotukset*

$$S(\mathbb{R}^n) \subset_c B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset_c S'(\mathbb{R}^n).$$

Kun $p, q \in]0, \infty[, s \in \mathbb{R}$ *niin meillä on voimassa jatkuvat upotukset*

$$S(\mathbb{R}^n) \subset_c F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset_c S'(\mathbb{R}^n).$$

Kun $s \in \mathbb{R}$ *ja* $p, q \in]0, \infty[$, *niin* $S(\mathbb{R}^n)$ *on tiheä avaruuksissa* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *ja* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Kun $s \in]0, \infty]$ ja $p, q \in [1, \infty]$, niin Besovin avaruudelle on voimassa ekvivalentti määritelmä

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) \mid \|f \mid B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n); m\| < \infty\}$$

missä $m \in \mathbb{Z}_+$, $m > s$, ja ekvivalentti normi on

$$\|f \mid B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n); m\| := \|f \mid L^p(\mathbb{R}^n)\| + \|t \in]0, 1] \mapsto t^{-s-1/q}\omega^m_p(f, t) \mid L^q(]0, 1])\|$$

Monet yleisesti käytetyt funktioavaruudet voidaan esittää Besovin ja Triebel-Lizorkinin avaruuksien avulla. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$. Meillä on [12, huomautus 2.2.2/3 ja luku 2.3.5]

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{Z}^s(\mathbb{R}^n) & =_{\mathrm{tvs}} & B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n), \quad \text{jos } s > 0, \\
W^s_p(\mathbb{R}^n) & =_{\mathrm{tvs}} & B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n), \quad \text{jos } 1 \le p < \infty, s > 0 \text{ ja } s \notin \mathbb{Z}, \\
H^s_p(\mathbb{R}^n) & =_{\mathrm{tvs}} & F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n), \quad \text{jos } 1 < p < \infty, s \in \mathbb{R}, \\
h_p(\mathbb{R}^n) & =_{\mathrm{tvs}} & F^0_{p,2}(\mathbb{R}^n), \quad 0 < p < \infty, \\
\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n) & =_{\mathrm{tvs}} & F^0_{\infty,2}(\mathbb{R}^n).
\end{array}$$

Tehtäviä:

9.1 Olkoon $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}^n}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $g(x) = f(a\mathbf{x} - \mathbf{b})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että

$$(\Delta_{\mathbf{h}}^m g)(\mathbf{x}) = (\Delta_{a\mathbf{h}}^m f)(a\mathbf{x} - \mathbf{b})$$

kaikille $\mathbf{x}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$.

9.2 Olkoon $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $p \in [1, \infty]$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ja $t \in \mathbb{R}_+$. Olkoon $g(\mathbf{x}) = f(a\mathbf{x} - \mathbf{b})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että

$$\omega_p^m(g, t) = |a|^{-\frac{n}{p}} \omega_p^m(f, |a|t).$$

9.3 Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Borel-mitallinen. Osoita, että f on tasaisesti jatkuva, jos ja vain jos

$$\lim_{t \to 0} \omega(f, t) = 0.$$

9.4 Olkoon E metrinen avaruus. Osoita, että $C_{\mathrm{com}}(E) \subset C_{\mathrm{u}}(E)$.

9.5 Olkoon E metrinen avaruus. Osoita, että $C_0(E) \subset C_{\mathrm{u}}(E)$.

9.6 Olkoon $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että $C^m(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{Z}^m(\mathbb{R}^n)$.

9.7 Olkoon $p \in [1, \infty[$ ja $f_k \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ kaikille $k \in \mathbb{N}$. Olkoon $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ja $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ siten, että $\|f_k - g\|_p \to 0$ ja $\|f_k - h\|_\infty \to 0$, kun $k \to \infty$. Osoita, että $g = h$ melkein kaikkialla.

Liite A

Tehtävien ratkaisut

Ratkaisu tehtävään 1.1:

(a) 1. refleksiivisyys:
$$x \sim x \iff x^2 = x^2$$
tosi kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

2. symmetrisyys:
$$x \sim y \iff x^2 = y^2 \iff y^2 = x^2 \iff y \sim x$$
kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

3. transitiivisuus:
$$\begin{aligned} x \sim y \wedge y \sim z &\iff x^2 = y^2 \wedge y^2 = z^2 \\ &\implies x^2 = z^2 \\ &\iff x \sim z \end{aligned}$$
kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(b) jäännösluokka-avaruus: $x^2 = y^2 \iff x = \pm y$, joten
$$\mathbb{R}/\!\sim\, = \{\{-a, a\} \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

(c) $1 \sim 1$ ja $1 \sim -1$, joten $\sim$ ei ole funktio.

Ratkaisu tehtävään 2.1: Olkoon G ryhmä ja $a \in G$. Oletetaan, että $e' \circ a = a$ jollekin $e' \in G$. Nyt $e \circ a = e' \circ a$, mistä seuraa, että $e = e \circ a \circ a^{-1} = e' \circ a \circ a^{-1} = e'$.

Ratkaisu tehtävään 2.2: Olkoon G ryhmä ja $a \in G$. Oletetaan, että $a \circ b = a \circ c = a$ joillekin $b, c \in G$. Nyt $b = a^{-1} \circ a \circ b = a^{-1} \circ a \circ c = c$.

Ratkaisu tehtävään 2.3: Olkoon $p, q \in P_n$ ja $k \in \{1, \ldots, n\}$. Nyt $(p \circ q)(k) = p(q(k))$. Koska $k \in \{1, \ldots, n\}$, niin $q(k) \in \{1, \ldots, n\}$, mistä seuraa, että $p(q(k)) \in \{1, \ldots, n\}$.

Olkoot $p, q, r \in P_n$. Nyt

$$\begin{aligned} ((p \circ q) \circ r)(k) &= (p \circ q)(r(k)) = p(q(r(k))) = p((q \circ r)(k)) \\ &= (p \circ (q \circ r))(k) \end{aligned}$$

kaikille $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Identtinen kuvaus id_{P_n} on neutraalialkio joukossa P_n. Koska $p : \{1, \ldots, n\} \twoheadrightarrow \{1, \ldots, n\}$ on bijektio, niin sillä on olemassa käänteisfunktio $p^{-1} : \{1, \ldots, n\} \twoheadrightarrow \{1, \ldots, n\} \in P_n$.

Ratkaisu tehtävään 2.4: Jos A on ryhmän G aliryhmä, niin A on itsekin ryhmä, joten $a \circ b \in A$ ja $a^{-1} \in A$ kaikille $a, b \in A$.

Oletetaan sitten, että A on suljettu operaatioiden $a \circ b$ ja a^{-1} suhteen. Aksiooma (G1) on ilmiselvä. Olkoon a jokin joukon A mielivaltainen alkio. Nyt oletuksen nojalla $a^{-1} \in A$ ja $e = a^{-1} \circ a \in A$.

Ratkaisu tehtävään 3.1: Olkoon $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$. Asetetaan

$$n := \max\left\{\left\lceil \frac{3}{\varepsilon} \right\rceil, 1\right\}.$$

Nyt

$$n \geq \frac{3}{\varepsilon} \implies \frac{3}{n} \leq \varepsilon.$$

Olkoot $j, k \in \mathbb{N}$, $j, k > n$ ja $j < k$. Nyt

$$\left| \frac{1}{j+1} - \frac{1}{k+1} \right| \leq \frac{1}{j+1} + \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{j} + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

Ratkaisu tehtävään 3.2: $(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + b\mathrm{i}$.

Ratkaisu tehtävään 4.1:

$$\begin{pmatrix} -50 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu tehtävään 4.2:

$$\begin{pmatrix} -20 & 12 \\ -5 & 179 \\ -5 & 92 \end{pmatrix}$$

Ratkaisu tehtävään 4.3: Olkoon $x, y \in \ker f$. Nyt $f(x) = f(y) = 0$. Koska f on lineaarinen, niin $f(x+y) = f(x)+f(y) = 0$, mistä seuraa, että $x+y \in \ker f$. Olkoon $a \in K$ ja $z \in \ker f$. Nyt $f(z) = 0$ ja koska f on lineaarinen, niin $f(az) = af(z) = 0$, joten $az \in \ker f$. Lauseen 4.2.6 nojalla $\ker f \subset_{\text{v.s.}} V$.

Ratkaisu tehtävään 4.4: Olkoon $x, y \in \operatorname{im} f$. Nyt $x = f(a)$ jollekin $a \in V$ ja $y = f(b)$ jollekin $b \in V$. Funktion f lineaarisuudesta seuraa, että $x + y = f(a) + f(b) = f(a + b) \in \operatorname{im} f$. Olkoon $a \in K$ ja $z \in \ker f$. Nyt $z = f(c)$ jollekin $c \in V$. Funktion f lineaarisuudesta seuraa, että $az = af(c) = f(ac) \in \operatorname{im} f$. Lauseen 4.2.6 nojalla $\operatorname{im} f \subset_{\text{v.s.}} W$.

Ratkaisu tehtävään 4.5: Olkoon $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{Z(m)\times Z(1)}$.

$$(g(\mathbf{v}))_k = (B\mathbf{v})_k = \sum_{j=1}^{m} B_{k,j}\mathbf{v}[j]$$

ja

$$\begin{aligned}(f(g(\mathbf{v})))_q &= \sum_{i=1}^{p} A_{q,i}(B\mathbf{v})_i = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{p} A_{q,i}B_{i,j}\mathbf{v}[j] = \sum_{j=1}^{m}(AB)_{q,j}\mathbf{v}[j] \\ &= (AB\mathbf{v})_q.\end{aligned}$$

Ratkaisu tehtävään 4.6:

(i) Olkoon $v \in V$. Nyt $0_K + 0_K = 0_K$, joten $(0_K + 0_K)v = 0_K v$. Toisaalta (V6):n nojalla $(0_K + 0_K)v = 0_K v + 0_K v$. Siten $0_K v + 0_K v = 0_K v$. Lisäämällä puolittain $-(0_K v)$ saadaan $0_K v + 0_V = 0_V$. (V3):n nojalla $0_K v = 0_V$.

(ii) Olkoon $v \in V$. Nyt (i)-kohdan nojalla $v + (-1_K)v = (1_K + (-1_K))v = 0_K v = 0_V$ ja (V4):n nojalla $v + (-v) = 0_V$. Siis $v + (-1_K)v = v + (-v)$. Lisäämällä puolittain $-v$ saadaan $(-1_K)v = -v$.

Ratkaisu tehtävään 5.1: Oletetaan ensin, että f on jatkuva. Olkoon $R \subset U$ avoin. Jos $f^{-1}[R] = \emptyset$, niin se on avoin. Oletetaan, että $f^{-1}[R] \neq \emptyset$. Olkoon $x \in f^{-1}[R]$. Nyt $f(x) \in R$ ja R on pisteen $f(x)$ avoin ympäristö. Koska f on jatkuva, niin on olemassa pisteen x avoin ympäristö P siten, että $f[P] \subset R$, mistä seuraa, että $P \subset f^{-1}[R]$. Lauseen 5.2.10 nojalla $f^{-1}[R]$ on avoin.

Oletetaan sitten, että

$$\forall R \subset U : (R \text{ on avoin } \implies f^{-1}[R] \text{ on avoin}).$$

Olkoon $x \in T$, $y := f(x)$, ja R pisteen y avoin ympäristö. Nyt $x \in f^{-1}[R]$ ja oletuksen nojalla $f^{-1}[R]$ on avoin. Joukko $f^{-1}[R]$ on pisteen x avoin ympäristö, ja $f[f^{-1}[R]] = R \subset R$. Piste x ja ympäristö R olivat mielivaltaisia, joten f on jatkuva.

Ratkaisu tehtävään 5.2: Oletetaan ensin, että määritelmä 5.2.17 toteutuu. Olkoon $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ja $x \in E_1$ ja olkoon Y pisteen $f(x)$ ympäristö siten, että $B(E_2; f(x), \varepsilon) \subset Y$. Oletuksen nojalla on olemassa pisteen x ympäristö $Z \subset E_1$, jolle $f[Z] \subset B(E_2; f(x), \varepsilon)$ Nyt $B(E; x, \delta) \subset Z$ jollekin $\delta \in \mathbb{R}_+$ ja

$$d_1(y, x) < \delta \implies y \in Z \implies d_2(f(y), f(x)) < \varepsilon,$$

missä $y \in E_1$ on mielivaltainen. Koska myös $x \in E_1$ oli mielivaltainen, niin ehto (5.2) toteutuu.

Oletetaan sitten, että ehto (5.2) toteutuu. Olkoon $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ja $x \in E_1$. Olkoon Y pisteen $f(x)$ ympäristö siten, että $B(E_2; f(x), \varepsilon) \subset Y$. Olkoon $y \in E_1$ siten, että $d_1(x, y) < \delta$. Oletuksen nojalla $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$, joten $f(y) \in B(E_2; f(x), \varepsilon)$. Siis

$$f[B(E_1; x, \delta)] \subset B(E_2; f(x), \varepsilon),$$

ja $B(E_1; x, \delta)$ on pisteen x ympäristö. Piste x oli mielivaltainen, joten määritelmä 5.2.17 toteutuu.

Ratkaisu tehtävään 5.3: Oletetaan ensin, että ehto (5.3) toteutuu. Olkoon Y pisteen a jokin ympäristö. Nyt $B(E; a, \varepsilon) \subset Y$ jollakin $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Oletuksen nojalla on olemassa $m \in \mathbb{N}$ siten, että $k \geq m \implies d(x_k, a) < \varepsilon$, ts. $k \geq m \implies x_k \in B(E; a, \varepsilon) \subset Y$.

Oletetaan sitten, että määritelmän 5.2.16 ehdot ovat voimassa. Olkoon $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nyt $Y := B(E; y, \varepsilon)$ on pisteen y ympäristö. Oletuksen nojalla on olemassa $m \in \mathbb{N}$ siten, että $x_k \in Y$ kaikilla $k \geq m$. Ts. $k \geq m \implies d(x_k, y) < \varepsilon$.

Ratkaisu tehtävään 5.4: Jos $B = \emptyset$ or $B = E$, niin väite on tosi. Oletetaan, että $B \neq \emptyset$ ja $B \neq E$. Jos oletetaan, että B on suljettu, niin oikeanpuoleinen väite seuraa lauseesta 5.2.15, koska jono on verkon erikoistapaus.

Oletetaan sitten, että

$$x_k \to a \in E \implies a \in B.$$

jokaiselle verkolle $(x_k)_{k=0}^{\infty} \subset B$. Olkoon $x \in E \setminus B$. Ei ole olemassa jonoa $(x_k) \subset B$ siten, että $x_k \to x$. Oletetaan, että $Y \cap B \neq \emptyset$ jokaiselle pisteen x ympäristölle Y (avaruudessa E). Olkoon

$$V_k := B\left(E; x, \frac{1}{k+1}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Kun $k \in \mathbb{N}$ niin valitaan $V_k \in Y \cap B$. Nyt $x_k \to x$, mikä on ristiriita, joten pisteellä x on ympäristö Y_0 siten, että $Y_0 \cap B = \emptyset$. Piste x oli mielivaltainen, joten lauseen 5.2.10 nojalla $A \setminus B$ on avoin, ja siten B on suljettu.

Ratkaisu tehtävään 5.5: Oletetaan ensin, että E on täydellinen. Olkoon Z avaruuden E sellainen tasainen struktuuri, että se generoi avaruuden E normaalin topologian. Olkoon $\mathbf{x} := (x_k)_{k=0}^{\infty} \subset E$ Cauchyn jono. Jonon $\mathbf{x}$ viipalefiltterikannan muodostavat viipaleet $\{x_n \mid n \geq n_0\}$, missä $n_0 \in \mathbb{N}$ vaihtelee. Olkoon $x \in E$ ja $W \in Z$. Koska $\{B(E; x, r) \mid r \in \mathbb{R}_+\}$ on ympäristökanta pisteessä x ja $Y(W, x)$ on pisteen x ympäristö, niin $B(E; x, r_0) \subset Y(W, x)$ jollekin $r_0 \in \mathbb{R}_+$. Nyt

$$d(x, y) < r_0 \implies y \in Y(W, x) \iff (x, y) \in W \tag{A.1}$$

Olkoon $\varepsilon \in]0, r_0[$. Koska $\mathbf{x}$ on Cauchyn jono, on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ kaikile $n, m \geq N$. Kun $F = \{x_n \mid n \geq N\}$ on jokin viipalefiltterikannan alkio, niin $F \times F = \{(x_n, x_m) \mid n \geq N, m \geq N\}$. Kun $(x, y) \in F \times F$, niin $d(x, y) < \varepsilon$, joten yhtälön (A.1) nojalla $(x, y) \in W$. Täten jonon (x_n) viipalefiltteri on Cauchyn filtteri, ja oletuksen nojalla se suppenee.

Oletetaan sitten, että jokainen Cauchyn jono suppenee avaruudessa E. Olkoon (F) Cauchyn filtteri avaruudessa E. Olkoon $x \in E$ ja $r \in \mathbb{R}_+$. Koska x-keskiset pallot ovat ympäristökanta pisteessä x, niin voidaan valita W siten, että $B(E; x, r) \subset Y(W, x)$. Merkitään tätä ympäristöä $W_r(x)$. Valitaan F_r siten, että $F_r \times F_r \subset W_r$. Nyt $x, y \in F_r \implies d(x, y) < r$. Valitaan $z_m \in F_{1/(m+1)}$ jokaiselle $m \in \mathbb{N}$. Jono (z_m) on Cauchyn jono, joten oletuksen nojalla se suppenee kohti jotakin avaruuden E alkiota z. On osoitettava että (F) suppenee kohti pistettä z. Avoimet z-keskiset pallot ovat ympäristökanta pisteessä z, joten on osoitettava, että jokaiselle z-keskiselle avoimelle pallolle on olemassa filtterin alkio, joka sisältyy palloon. Olkoon $\varepsilon \in]0, 2[$. Voidaan valita $m_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $d(z, z_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$ ja $m \geq m_0$, missä $m_0 \in \mathbb{N}$. Olkoon

$$m := \max\left\{m_0, \left\lceil \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil\right\} + 1.$$

Nyt $d(x, z_m) < \frac{1}{m+1} < \frac{\varepsilon}{2}$, mistä seuraa, että $d(x, z) \leq d(x, z_m) + d(z_m, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Siis $x \in B(E; z, \varepsilon)$. Täten $F_{1/(m+1)} \subset B(E; z, \varepsilon)$ ja filtteri (F) suppenee kohti pistettä z.

Ratkaisu tehtävään 6.1: Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineaarinen funktio ja $M(f)$ sen matriisi. Olkoot $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$. Nyt $\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle = \mathbf{x}^\dagger M(f) \mathbf{y} = (\mathbf{y}^\dagger (M(f))^\dagger \mathbf{x})^* = \langle \mathbf{y}, (M(f))^\dagger \mathbf{x} \rangle^* = \langle (M(f))^\dagger \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Toisaalta $\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle = \langle f^\dagger(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle$. Siten $M(f^\dagger) = (M(f))^\dagger$.

Ratkaisu tehtävään 6.2: Funktio f on määritelmän nojalla lineaarinen injektio. Olkoon $x \in l^1$. Nyt $\|x\|_1 \geq \|x\|_\infty$, joten $\|f(x)\|_\infty \leq \|x\|_1$. Siis f on jatkuva.

Olkoon

$$\mathbf{y}_n[k] := \begin{cases} 1; & k < n \\ 0; & k \geq n \end{cases}$$

missä $k, n \in \mathbb{N}$. Nyt $\|\mathbf{y}_n\|_1 = n$ ja $\|\mathbf{y}_n\|_\infty = 1$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Edelleen

$$\sup\{\|f^{-1}(z)\| \mid \mathbf{z} \in l^\infty \wedge \|\mathbf{z}\| \leq 1\} = \sup\{\|\mathbf{z}\|_1 \mid \mathbf{z} \in l^\infty \wedge \|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1\} = \infty.$$

Siis f^{-1} ei ole rajoitettu eikä siten myöskään jatkuva.

Ratkaisu tehtävään 6.3:

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &+ \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + R_4(x) \end{aligned}$$

Ratkaisu tehtävään 6.4:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) =& f(\mathbf{x}_0) \\ &+ \sum_{i_1=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(\mathbf{x}_0)(x_{i_1} - x_{i_1}^{(0)}) \\ &+ \sum_{i_1,i_2=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} f(\mathbf{x}_0)(x_{i_1} - x_{i_1}^{(0)})(x_{i_2} - x_{i_2}^{(0)}) \\ &+ \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \frac{\partial}{\partial x_{i_3}} f(\mathbf{x}_0)(x_{i_1} - x_{i_1}^{(0)})(x_{i_2} - x_{i_2}^{(0)})(x_{i_3} - x_{i_3}^{(0)}) \\ &+ \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \frac{\partial}{\partial x_{i_3}} \frac{\partial}{\partial x_{i_4}} f(\mathbf{x}_0)(x_{i_1} - x_{i_1}^{(0)})(x_{i_2} - x_{i_2}^{(0)})(x_{i_3} - x_{i_3}^{(0)})(x_{i_4} - x_{i_4}^{(0)}) \\ &+ R_4(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Ratkaisu tehtävään 7.1: Olkoon $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Olkoon

$$g := \varphi\left(\frac{\cdot + \mathbf{b}}{a}\right).$$

Nyt

$$\begin{aligned} \langle \tau_{a,\mathbf{b}}\tau_{c,\mathbf{d}}T, \varphi\rangle &= \frac{1}{|a|^n}\langle \tau_{c,\mathbf{d}}T, g\rangle \\ &= \frac{1}{|a|^n}\frac{1}{|c|^n}\left\langle T, g\left(\frac{\cdot + \mathbf{d}}{c}\right)\right\rangle \end{aligned}$$

ja

$$g\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{d}}{c}\right) = \varphi\left(\frac{\frac{\mathbf{x}+\mathbf{d}}{c} + \mathbf{b}}{a}\right) = \varphi\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{d}+c\mathbf{b}}{ac}\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Siis

$$\langle \tau_{a,\mathbf{b}}\tau_{c,\mathbf{d}}T, \varphi\rangle = \frac{1}{|a|^n}\frac{1}{|c|^n}\left\langle T, \varphi\left(\frac{\cdot + \mathbf{d} + c\mathbf{b}}{ac}\right)\right\rangle = \langle \tau_{ac,c\mathbf{b}+\mathbf{d}}T, \varphi\rangle.$$

Ratkaisu tehtävään 7.2: Kun $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, niin

$$\delta(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(0) = \varphi(0) + \psi(0) = \delta(\varphi) + \delta(\psi).$$

Kun $a \in \mathbb{R}$ ja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, niin

$$\delta(a\varphi) = (a\varphi)(0) = a\varphi(0) = a\delta(\varphi).$$

Siis δ on lineaarinen.

Oletetaan, että $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ja $\varphi_k \to \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Nyt $\varphi_k \to \psi$ tasaisesti, eli

$$\lim_{k \to \infty} \|\psi - \varphi_k\|_{\infty} = 0. \tag{A.2}$$

Edelleen

$$|\psi(0) - \varphi_k(0)| \leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |\psi(\mathbf{x}) - \varphi_k(\mathbf{x})| = \|\psi - \varphi_k\|_{\infty} \tag{A.3}$$

kaikille $k \in \mathbb{N}$. Yhtälöistä (A.2) ja (A.3) seuraa, että

$$\lim_{k \to \infty} |\psi(0) - \varphi_k(0)| = 0,$$

eli

$$\lim_{k \to \infty} |\delta(\psi) - \delta(\varphi_k)| = 0,$$

mistä seuraa, että

$$\delta(\varphi_k) \to \delta(\psi), \quad k \to \infty.$$

Siis

$$\lim_{k \to \infty} \delta(\varphi_k) = \delta(\psi) = \delta\left(\lim_{k \to \infty} \varphi_k\right),$$

joten $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Ratkaisu tehtävään 8.1: Olkoot $E, F \in \mathcal{R}$ ja $E \cap F = \emptyset$. Määritellään

- $E_0 := E$.
- $E_1 := F$.
- $E_k := \emptyset$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Nyt

$$\rho\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k\right) = \rho(E \cup F) = \rho(E) + \rho(F).$$

Ratkaisu tehtävään 8.2: $\mathcal{A}$ on σ-algebra, ja μ on joukkofunktio. Funktio μ on määritelmänsä nojalla ei-negatiivinen. Meillä on $\mu(\emptyset) = \#\emptyset = 0$.

Oletetaan, että

1. $E_k \in \mathcal{A}$ kaikille $k \in \mathbb{N}$.
2. $E_i \cap E_j = \emptyset$ kaikille $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$.
3. $\cup_{k=0}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$.

Olkoon
$$F := \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k.$$
Jos F on äärellinen, niin
$$F := \bigcup_{k=0}^{n} E_{K(k)},$$
missä $n \in \mathbb{N}$, $K(k) \in \mathbb{N}$ kaikille $k = 1, \ldots, n$. Koska F on äärellinen ja joukot E_k ovat erillisiä, niin
$$(\forall k \in \{1, \ldots, n\} : i \neq K(k)) \implies E_i = \emptyset.$$

Oletetaan sitten, että F on ääretön. Olkoon
$$G_k := \bigcup_{i=1}^{k} E_i, \quad k \in \mathbb{N}.$$
Nyt
$$F = \bigcup_{k=0}^{\infty} G_k.$$
Olkoon $m \in \mathbb{N}$. Koska F on ääretön, niin on olemassa $k_0 \in \mathbb{N}$ siten, että
$$\mu\left(G_{k_0}\right) = \# G_{k_0} > m.$$
Nyt $\mu(G_k) > m$ kaikille $k \geq k_0$. Täten lauseen 8.2.4 nojalla
$$\infty = \mu(F) = \lim_{k \to \infty} \mu\left(G_k\right).$$
Siis μ on ei-negatiivinen ja täysin additiivinen ja siten mitta.

Ratkaisu tehtävään 9.1: Todistetaan induktiolla. Nyt
$$\begin{aligned}(\Delta_{\mathbf{h}} g)(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - g(\mathbf{x}) = f(a\mathbf{x} + a\mathbf{h} - \mathbf{b}) - f(a\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= (\Delta^1_{a\mathbf{h}})(a\mathbf{x} - \mathbf{b}),\end{aligned}$$
kaikille $\mathbf{x}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. Siis väite on tosi, kun $m = 1$.

Oletetaan, että lause on tosi jollakin $m_1 \in \mathbb{Z}_+$. Nyt
$$\begin{aligned}(\Delta^{m_1+1}_{\mathbf{h}} g)(\mathbf{x}) &= \left(\Delta^1_{\mathbf{h}}\left(\Delta^{m_1}_{\mathbf{h}} g\right)\right)(\mathbf{x}) = (\Delta^{m_1}_{\mathbf{h}} g)(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - (\Delta^{m_1}_{\mathbf{h}} g)(\mathbf{x}) \\ &= (\Delta^{m_1}_{a\mathbf{h}} f)(a\mathbf{x} + a\mathbf{h} - \mathbf{b}) - (\Delta^{m_1}_{a\mathbf{h}} f)(a\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= \left(\Delta^1_{a\mathbf{h}}\left(\Delta^{m_1}_{a\mathbf{h}} f\right)\right)(a\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= (\Delta^{m_1+1}_{a\mathbf{h}} f)(a\mathbf{x} - \mathbf{b}).\end{aligned}$$

Siis väite on tosi, kun $m = m_1 + 1$.

Ratkaisu tehtävään 9.2: Käytetään tehtävää 9.1.

$$\begin{aligned}
\omega_p^m(g,t) &= \sup\{\|\Delta_h^m g\|_p \mid h \in \bar{B}(\mathbb{R}^n;0,t)\} \\
&= \sup\{\|(\Delta_{ah}^m f)(a\cdot - \mathbf{b})\|_p \mid h \in \bar{B}(\mathbb{R}^n;0,t)\} \\
&= |a|^{-\frac{n}{p}} \sup\{\|\Delta_{ah}^m f\|_p \mid h \in \bar{B}(\mathbb{R}^n;0,t)\} \\
&= |a|^{-\frac{n}{p}} \sup\{\|\Delta_k^m f\|_p \mid k \in \bar{B}(\mathbb{R}^n;0,|a|t)\} \\
&= |a|^{-\frac{n}{p}} \omega_p^m(f,|a|t).
\end{aligned}$$

Ratkaisu tehtävään 9.3: Oletetaan ensin, että f on tasaisesti jatkuva. Olkoon $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Koska f on tasaisesti jatkuva, on olemassa $t_0 \in \mathbb{R}_+$ siten, että kaikille $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2 < t_0$ on $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Olkoon $t \in]0, t_0[$ ja $\mathbf{h} \in \bar{B}(\mathbb{R}^n;0,t)$. Nyt

$$|(\Delta_{\mathbf{h}} f)(\mathbf{x})| = |f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Täten

$$\|\Delta_{\mathbf{h}} f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Koska $\mathbf{h}$ oli mielivaltainen, niin

$$\omega(f,t) = \sup\{\|\Delta_{\mathbf{h}} f\|_\infty \mid \mathbf{h} \in \bar{B}(\mathbb{R}^n;0,t)\} \leq \varepsilon.$$

Oletetaan sitten, että

$$\lim_{t\to 0} \omega(f,t) = 0.$$

Olkoon $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. On olemassa $\delta \in \mathbb{R}_+$ siten, että $\omega(f,\delta) < \varepsilon$. Olkoon $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2 < \delta$ ja $\mathbf{h} := \mathbf{y} - \mathbf{x}$. Nyt

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| = |(\Delta_{\mathbf{h}} f)(\mathbf{x})| \leq \|\Delta_{\mathbf{h}} f\|_\infty \leq \omega(f,\delta) < \varepsilon.$$

Ratkaisu tehtävään 9.4: Olkoon $f \in C_{\mathrm{com}}(E)$. Olkoon $A := \operatorname{supp} f$ ja $h \in \mathbb{R}_+$. Jokaisella $x \in A$ on olemassa $t(x) \in \mathbb{R}_+$ siten, että

$$f[B(E;x,t(x))] \subset B\left(\mathbb{C}; f(x), \frac{h}{2}\right)$$

Olkoon

$$K(x) := B\left(E;x,\frac{1}{2}t(x)\right) \cap A, \quad x \in A.$$

Nyt $P := \{K(x) \mid x \in A\}$ on topologisen avaruuden A avoin peite. Koska A on kompakti niin peitteellä P on äärellinen alipeite P',

$$P' := \{K(x_k) \mid k = 1, \dots, m\}$$

missä $m \in \mathbb{Z}_+$ ja $x_k \in A$, $k = 1, \dots, n$. Olkoon

$$r := \min\{t(x_k) \mid k = 1, \dots, m\}.$$

Olkoot $x, y \in A \wedge d(x, y) < \frac{r}{2}$. Nyt $x \in K(x_{k_0})$ jollekin $k_0 \in \{1, \dots, m\}$ ja $d(x, x_{k_0}) < \frac{1}{2} t(x_{k_0})$. Nyt

$$|f(x) - f(x_{k_0})| < \frac{h}{2}. \tag{A.4}$$

Edelleen

$$\begin{aligned} d(y, x_{k_0}) &\leq d(y, x) + d(x, x_{k_0}) \\ &< \frac{r}{2} + \frac{1}{2} t(x_{k_0}) \\ &< \frac{1}{2} t(x_{k_0}) + \frac{1}{2} t(x_{k_0}) \\ &= t(x_{k_0}), \end{aligned}$$

joten $y \in B(E; x_{k_0}, t(x_{k_0}))$, mistä seuraa, että

$$|f(y) - f(x_{k_0})| < \frac{h}{2}. \tag{A.5}$$

Yhtälöistä (A.4) ja (A.5) seuraa, että

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_{k_0})| + |f(x_{k_0}) - f(y)| < \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = h. \tag{A.6}$$

Oletetaan sitten, että $x \in A$, $y \in E \setminus A$ ja $d(x, y) < \frac{r}{2}$. Nyt $x \in K(x_{k_1})$ jollakin $k_1 \in \{1, \dots, m\}$ ja $d(x, x_{k_1}) < \frac{1}{2} t(x_{k_1})$. Edelleen

$$\begin{aligned} d(y, x_{k_1}) &\leq d(y, x) + d(x, x_{k_1}) \\ &< \frac{r}{2} + \frac{1}{2} t(x_{k_1}) \\ &< \frac{1}{2} t(x_{k_1}) + \frac{1}{2} t(x_{k_1}) \\ &= t(x_{k_1}), \end{aligned}$$

joten $y \in B(E; x_{k_1}, t(x_{k_1}))$, mistä seuraa, että

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_{k_1})| + |f(x_{k_1}) - f(y)| < \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = h. \tag{A.7}$$

Tasainen jatkuvuus seuraa yhtälöistä (A.6) ja (A.7).

Ratkaisu tehtävään 9.5: Olkoon $f \in C_0(E)$. Olkoon $h \in \mathbb{R}_+$. Määritellään

$$A := \{x \in E \mid |f(x)| \geq \frac{h}{3}\}.$$

Koska $f \in C_0(E)$, niin A on kompakti. Jokaisella $x \in A$ on olemassa $t(x) \in \mathbb{R}_+$ siten, että

$$f[B(E; x, t(x))] \subset B\left(\mathbb{C}; f(x), \frac{h}{2}\right)$$

Olkoon

$$K(x) := B\left(E; x, \frac{1}{2}t(x)\right) \cap A, \quad x \in A.$$

Nyt $P := \{K(x) \mid x \in A\}$ on topologisen avaruuden A avoin peite. Koska A on kompakti niin peitteellä P on äärellinen alipeite P',

$$P' := \{K(x_k) \mid k = 1, \ldots, m\}$$

missä $m \in \mathbb{Z}_+$ ja $x_k \in A$, $k = 1, \ldots, n$. Olkoon

$$r := \min\{t(x_k) \mid k = 1, \ldots, m\}.$$

1. Olkoot $x, y \in A \wedge d(x, y) < \frac{r}{2}$. Nyt $x \in K(x_{k_0})$ jollekin $k_0 \in \{1, \ldots, m\}$ ja

$$\begin{aligned} d(y, x_{k_0}) &\leq d(y, x) + d(x, x_{k_0}) \\ &< \frac{r}{2} + \frac{1}{2}t(x_{k_0}) \\ &< \frac{1}{2}t(x_{k_0}) + \frac{1}{2}t(x_{k_0}) \\ &= t(x_{k_0}). \end{aligned}$$

   Täten $y \in B(E; x_{k_0}, t(x_{k_0}))$, joten $|f(y) - f(x_{k_0})| < \frac{h}{2}$. Tästä seuraa, että

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_{k_0})| + |f(x_{k_0}) - f(y)| < \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = h. \quad \text{(A.8)}$$

2. Olkoot $x, y \in E \setminus A$. Nyt

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq \frac{h}{3} + \frac{h}{3} < h \qquad \text{(A.9)}$$

3. Olkoot $x \in A$, $y \in E \setminus A$ ja $d(x, y) < \frac{r}{2}$. Nyt $x \in K(x_{k_1})$ jollakin $k_1 \in \{1, \ldots, m\}$ ja $d(x, x_{k_1}) < \frac{1}{2}t(x_{k_1})$. Edelleen

$$\begin{aligned} d(y, x_{k_1}) &\leq d(y, x) + d(x, x_{k_1}) \\ &< \frac{r}{2} + \frac{1}{2}t(x_{k_1}) \\ &\leq \frac{1}{2}t(x_{k_1}) + \frac{1}{2}t(x_{k_1}) \end{aligned}$$

$$= t(x_{k_1}),$$

joten $y \in B(E; x_{k_1}, t(x_{k_1}))$, mistä seuraa, että

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_{k_1})| + |f(x_{k_1}) - f(y)| < \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = h. \quad (A.10)$$

Tasainen jatkuvuus seuraa yhtälöistä (A.8), (A.9) ja (A.10).

Ratkaisu tehtävään 9.6: Olkoon $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$. Nyt $f \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$. Meillä on

$$\|f \mid \mathcal{Z}^m(\mathbb{R}^n)\| = \|f \mid C^{m-1}(\mathbb{R}^n)\| + \sum_{|\alpha|=m-1} \sup \left\{ \frac{1}{t}\omega_\infty^2(\partial^\alpha f, t) \;\middle|\; t \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Kaikilla $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = m-1$ on $\partial^\alpha f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Olkoot $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ ja $\mathbf{h} := \mathbf{y} - \mathbf{x}$. Taylorin kehitelmästä (6.14), (6.15) saadaan

$$(\partial^\alpha f)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = (\partial^\alpha f)(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^n \left(\partial^{\mathbf{e}_k^{[n]}} \partial^\alpha f\right)(\mathbf{x} + c\mathbf{h})\, \mathbf{h}[k],$$

missä $c \in]0,1[$. Tästä seuraa, että

$$(\partial^\alpha f)(\mathbf{y}) - (\partial^\alpha f)(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \left(\partial^{\mathbf{e}_k^{[n]}} \partial^\alpha f\right)(\mathbf{x} + c\mathbf{h})\, \mathbf{h}[k].$$

Nyt

$$\begin{aligned} |(\partial^\alpha f)(\mathbf{y}) - (\partial^\alpha f)(\mathbf{x})| &\leq n\|\partial^\alpha f \mid C^1(\mathbb{R}^n)\| \cdot \|\mathbf{h}\|_\infty \\ &\leq n\|f \mid C^m(\mathbb{R}^n)\| \|\mathbf{h}\|_\infty \end{aligned}$$

mistä seuraa, että

$$\|\Delta_{\mathbf{h}}(\partial^\alpha f)\|_\infty \leq n\|f \mid C^m(\mathbb{R}^n)\| \|\mathbf{h}\|_\infty,$$

joten

$$\frac{1}{\|\mathbf{h}\|_\infty} \|\Delta_{\mathbf{h}}^2(\partial^\alpha f)\|_\infty \leq 2n\|f \mid C^m(\mathbb{R}^n)\|.$$

Täten

$$\sup \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{h}\|_\infty} \|\Delta_{\mathbf{h}}^2(\partial^\alpha f)\|_\infty \;\middle|\; \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} \leq 2n\|f \mid C^m(\mathbb{R}^n)\|. \quad (A.11)$$

Yhtälöistä (A) ja (A.11) seuraa, että

$$\|f \mid \mathcal{Z}^m(\mathbb{R}^n)\| \leq 2n\|f \mid C^m(\mathbb{R}^n)\| < \infty.$$

Ratkaisu tehtävään 9.7: Olkoon $B_k := \bar{B}(\mathbb{R}^n; 0, k+1)$ kaikille $k \in \mathbb{N}$. Olkoon $k_0 \in \mathbb{N}$ ja $c \in \mathbb{R}_+$. On olemassa $m \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\|g - f_j\|_p < \frac{c}{2} \quad \wedge \quad \|h - f_j\|_\infty < \frac{c}{2}\left(\mu(B_{k_0})\right)^{-\frac{1}{p}}$$

kaikille $j \in \mathbb{N}$, $j \geq m$. Nyt

$$\|(g - f_j) \restriction B_{k_0}\| < \frac{c}{2}$$

kaikille $j \in \mathbb{N}$, $j \geq m$ ja

$$\|(h - f_j) \restriction B_{k_0}\| < \frac{c}{2} \left(\mu\left(B_{k_0}\right)\right)^{-\frac{1}{p}}$$

kaikille $j \in \mathbb{N}$, $j \geq m$. Olkoon $r \in \mathbb{N}$, $r \geq m$. Nyt

$$\|(h - f_r) \restriction B_{k_0}\|_p < \left(\left(\frac{c}{2} \left(\mu\left(B_{k_0}\right)\right)^{-\frac{1}{p}}\right)^p \mu(B_{k_0})\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{c}{2}.$$

Täten

$$\begin{aligned} \|(g - h) \restriction B_{k_0}\|_p &\leq \|(g - x_r) \restriction B_{k_0}\|_p + \|(x_r - h) \restriction B_{k_0}\|_p \\ &< \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c. \end{aligned}$$

Koska $c \in \mathbb{R}_+$ oli mielivaltainen, nii

$$g \restriction B_{k_0} = h \restriction B_{k_0} \quad \text{melkein kaikkialla.} \tag{A.12}$$

Olkoot

$$\begin{aligned} C_k &:= \{\mathbf{x} \in B_k \mid g(\mathbf{x}) \neq h(\mathbf{x})\}, \\ C &:= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\mathbf{x}) \neq h(\mathbf{x})\}. \end{aligned}$$

Nyt

$$C = \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k$$

ja $(C_k)_{k=0}^{\infty}$ on kasvava jono joukkoja. Yhtälön (A.12) nojalla $\mu(C_k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Lauseen 8.2.4 nojalla

$$\mu(C) = \lim_{k \to \infty} \mu(C_k) = \lim_{k \to \infty} 0 = 0.$$

Siis $g = h$ melkein kaikkialla.

Index

Kirjallisuutta

[1] P. Atkins and R. Friedman. *Molecular Quantum Mechanics.* Oxford University Press Inc., New York, 2005.

[2] C. K. Chui and C. Li. Dyadic affine decompositions and functional wavelet transforms. *SIAM J. Math. Anal.*, 27(3):865–890, 1996.

[3] D. L. Donoho. Interpolating Wavelet Transforms. Technical report, Department of Statistics, Stanford University, 1992.

[4] Grossman. *Multivariable Calculus, Linear Algebra, and Differential Equations.* Saunders College Pub, 1996.

[5] V. Hutson, J. S. Pym, and M. J. Cloud. *Applications of Functional Analysis and Operator Theory.* Elsevier, 2005.

[6] A. W. Knapp. *Basic Real Analysis.* Birkhäuser, 2005.

[7] H. E. Lacey. *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces.* Springer-Verlag, 1974.

[8] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, Inc., second edition, 1991.

[9] R. A. Ryan. *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces.* Springer, New York, 2002.

[10] H. H. Schaefer. *Topological Vector Spaces.* Springer-Verlag, 1971.

[11] I. Singer. *Bases in Banach Spaces I.* Springer-Verlag, Heidelberg, 1970.

[12] H. Triebel. *Theory of Function Spaces.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.

[13] useita kirjoittajia. Banach-Tarski paradox. Wikipedian artikkeli.

[14] useita kirjoittajia. Borel set. Wikipedian artikkeli.

[15] useita kirjoittajia. Cardinal number. Wikipedian artikkeli.

[16] useita kirjoittajia. Compact space. Wikipedian artikkeli.

[17] useita kirjoittajia. Complete metric space. Wikipedian artikkeli.

[18] useita kirjoittajia. Construction of the real numbers. Wikipedian artikkeli.

[19] useita kirjoittajia. Directed set. Wikipedian artikkeli.

[20] useita kirjoittajia. Distribution (mathematics). Wikipedian artikkeli.

[21] useita kirjoittajia. Field (mathematics). Wikipedian artikkeli.

[22] useita kirjoittajia. Measurable function. Wikipedian artikkeli.

[23] useita kirjoittajia. Natural number. Wikipedian artikkeli.

[24] useita kirjoittajia. Net (mathematics). Wikipedian artikkeli.

[25] useita kirjoittajia. Ordinal number. Wikipedian artikkeli.

[26] useita kirjoittajia. Probability axioms. Wikipedian artikkeli.

[27] useita kirjoittajia. Riesz sequence. Wikipedian artikkeli.

[28] useita kirjoittajia. Sequentially compact space. Wikipedian artikkeli.

[29] useita kirjoittajia. Strong topology (polar topology). Wikipedian artikkeli.

[30] useita kirjoittajia. Tensor product of Hilbert spaces. Wikipedian artikkeli.

[31] useita kirjoittajia. Topological property. Wikipedian artikkeli.

[32] useita kirjoittajia. Topological space. Wikipedian artikkeli.

[33] useita kirjoittajia. Topological tensor product. Wikipedian artikkeli.

[34] useita kirjoittajia. Weak topology. Wikipedian artikkeli.